LA SCIENZA DEL CALCOLO OPERA DEL SIG. AB. PIETRO FRANCHINI...

Pietro Franchini



LA SCIENZA

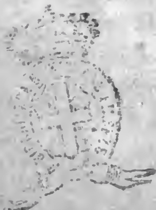
DEL CALCOLO

OPERA

DEL SIG. AB. PIETRO FRANCHINI

P. PROF. DI MATEMATICHE SUPERIORI
SOCIO DELL' ACCADEMIA DI SCIENZE, BELLE LETTERE ED ARTI DI LUCCA
MEMBRO ORDINARIO DELL' ACCADEMIA ITALIANA
CORRISPONDENTE DELLA R. ACCADEMIA
DI TORINO &c.

TOMO I.





LIVORNO
DAI TORCHJ DI ASSUNTO BARBANI & C.°
1816.

Gl' insegnamenti della Matematica non sono opinioni di dottori o fantasie d' uomini, ma beneplaciti divini e verità indubitate ed eterne (TORRICELLI = Lezioni Accad. Lez. IX.)

16. 8. 80

PREFAZIONE

DELL' AUTORE.

Noi comprendiamo sotto il titolo di Scienza del Calcolo tutta la Matematica, tranne la Geometria e quanto da essa unicamente dipende. La Scienza suddetta si distingue in quattro parti, e sono i calcoli essenzialmente diversi, che l'umano ingegno ha sino al presente immaginati, cioè: il calcolo aritmetico e l'algebrico, quello delle differenze e l'infinitesimale. Il calcolo delle *facoltà numeriche* è un'emanazione de'due primi; quello delle *funzioni generatrici* de'primi tre: il calcolo delle *variazioni* del quarto. Noi ne trattiamo incidentemente.

L'indice premesso ad ogni tomo farà conoscere il disegno dell'Opera: ecco le massime che hanno servito di norma nella esecuzione.

I. Stabilire con una dimostrazione rigorosa e diretta i principj fondamentali d'ogni teoria.

II. Quando l'indole dell'argomento lo comporta sollevarsi a metodi generali per discendere alle ipotesi particolari, generiche nella loro specie.

III. Procedere dal particolare al generale allorchè l'induzione apparisce necessaria per preparare la mente alla difficile astrazione, talvolta inseparabile dall'indole de'metodi esatti,

come nella teorìa delle combinazioni e nel completo sviluppamento della formola del binomio; e quando altra via non si scuopre onde giungere al bramato risultamento, come nella indagine che ha per iscopo di svolgere in serie una funzione di un qualunque numero di variabili. (*Laplace* Mécan. Celes. Liv. II. §. 21.)

IV. Profittare delle considerazioni geometriche se giovano alla semplicità ed alla chiarezza. L'analisi calcolatrice, sovrana fra le scienze, non abbisogna di un lusso effimero per accreditarsi.

V. Disporre in tal guisa le varie dottrine, e con tal arte connetterne le successive nozioni, che ne derivi un continuo sistema di proposizioni identiche. Niuna operazione si dee sopprimere, cui un ingegno esercitato e perspicace non possa mentalmente supplire, o di cui non veggasi la dipendenza dalle regole generali. Ci siamo dipartiti molto di rado, e non senza una speciale ragione, da questa massima per rapporto ad alcune formole da noi proposte; formole che i principianti verificheranno con le sostituzioni particolari, ed i provetti cercheranno di dimostrare per loro esercizio.

VI. Esaurire senza interruzione ogni argomento onde favorire l'associazione delle idee, abbreviare la fatica e diminuire il dispendio della gioventù.

VII. Raffinare i metodi, estendere le applicazioni, ed accrescere per quanto è possibile la sfera delle teorìe.

Tali per nostro avviso esser debbono le basi di un'Opera analitica, se vuolsi che nel miglior modo all'attual bisogno soddisfaccia della pubblica istruzione.

La legge impostaci in forza della prima massima ci ha obbligati a completare un ampio numero di dimostrazioni induttive: ed a rigettarne molte, per sostituir loro un metodo adequato e conveniente al nuov'ordine da noi prescelto.

La massima esposta sotto il numero VII. ci ha sovente impegnati in gravi difficoltà: giudicheranno i Geometri se felici, e sino a qual segno, sieno stati i nostri tentativi per superarle. Distinto oggetto di nostra premura è stato altresì quello di opportunamente mischiare l'utile al dolce, e di porgere un irresistibile allettamento alla ritrosa gioventù; facendole conoscere la prepotente influenza dell'analisi mista nelle disquisizioni economiche, mercantili, vitalizie, legali, economico-politiche, geodetiche, geografiche ec. ed in quelle singolarmente che più interessano l'irrequieta curiosità o la cieca cupidigia dell'uomo, la teorica di alcuni giuochi primarj ed il calcolo delle probabilità.

Siccome coloro che si presentano alle nostre lezioni possiedono i primi elementi del calcolo aritmetico, appresi coi rudimenti della lingua latina, abbiamo preferito ad un prolisso trattato, incompatibile coi regolamenti dell'Università Lucchese, una compendiosa discussione metafisica delle nozioni fondamentali, corredata di pochi esempj.

Le critiche osservazioni che frequenti s'incontrano ne'nostri libri, sono destinate a prevenire perniciosi equivoci, e speriamo che riuscir debbano di universale soddisfazione. Se vero è che il primario scopo di un pubblico istitutore sia quello di porgere un sicuro e compiuto ammaestramento: se la scoperta di un difficile errore è sovente comparabile a quella di un'importante verità; se *Lagrange* non ha creduta disdicevole alla sua modestia un'inflessibile censura d'ogni falso concetto sfuggito ai primi Geometri, ragion vuole che da noi non si sagrifichi l'avanzamento della pubblica istruzione ad un male inteso riguardo, ma che si parli, come si espresse l'immortale *Galileo* (Op. T. III. p. 381. ediz. di Padova) *con quella libertà, che molto ragionevolmente dee potersi usare fra quelli, che più ansiosi sono della verità che della ostentazione.* Liberali nel concedere, ove occorra, un

rispettoso tributo di lode al valore degli analisti che onorano l'Europa, noi sveliamo francamente l'errore insidioso, ma con moderazione e riservatezza, ma senza citar l'autore o l'opera sua s'egli è Italiano e vivente: nè di tal convenienza, talvolta trascurata anche dal Geometra Torinese (Théor. des Fonct. Anal. §. 176. ec.) noi aspiriamo al contraccambio: ci protestiamo anzi disposti ad accogliere con gradimento le censure de' nostri libri, purchè giuste, e promettiamo di riprodurle ad altrui norma in uno de' susseguenti volumi.

AVVERTIMENTO
DELL' EDITORE.



Al Tomo IV. ne succederà uno di tavole numeriche, il cui respettivo titolo è:

I. De' numeri primi sino a 100 mila.

II. De' minimi divisori de' numeri dispari.

III. Valor decimale de' rotti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... $\frac{1}{999}$.

IV. Delle potenze de' numeri intieri.

V. Del capitale equivalente all'annua rendita di una lira, per un n.° d'anni da uno sino a 100, nelle quattro ipotesi che l'interesse del denaro sia al 3, al 4, al 5, al 6 per 100.

VI. Della vita media: VII. Della prestazione vitalizia per tutte l'età da un anno sino a 97, corrispondente all'interesse del 5 per 100.

VIII. Catalogo de' Matematici illustri da *Aristèo* Seniore sino a' tempi presenti, loro nome, cognome, patria ed età, coll' indicazione dell'anno in cui sono morti. Da questo catalogo apparisce essere la vita media de' Matematici insigni, molto più longeva della vita media comune. Fissato il rapporto delle due vite medie si rintracciano le cagioni, a cui la notabile differenza delle due vite sembra doversi attribuire.

Le tavole 3.ª e 4.ª sono molto più estese di quelle che trovansi nelle Lez. Matem. di *Marie*, ediz. 5.ª Le due ultime hanno il pregio di un'intiera novità.

I §§. notati con l'asterisco possono riserbarsi ad un secondo corso.

INDICE DELLE MATERIE.

★

ORAZIONE INAUGURALE

SU I PREGJ

DELLA MATEMATICA

LETTA NELL' APERTURA DEGLI STUDJ DELL' UNIVERSITA' LUCCHESE L' ANNO 1802.

Un desiderio innato e vivace di sapere, ha spinto mai sempre l' uomo a studiare i segreti della difficil natura. Lo spettacolo maestoso ch' ella dispiega al suo sguardo, solleticò in prima l' inquieta curiosità del suo spirito: poscia i moltiplici rapporti dei fenomeni naturali cogli umani bisogni, lo determinarono a coltivare con ardore una scienza, che prometteagli più d' ogni altra, largo compenso de' suoi sudori: immaginò esperimenti ed osservazioni, formò ipotesi e sistemi, investigò calcoli e misure, e ad onta degli ostacoli, che la ritrosa natura costantemente oppose a' suoi tentativi, segnò le prime tracce dell' Astronomia sulle torri di Babilonia (1); *trovò nell' Indie il rapporto del diametro alla circonferenza del circolo* (2); *acquistò pratiche nozioni d' Idraulica nell' Egitto; dirozzò la Nautica*

presso Tiro e Sidone, e tutto poi ridusse a miglior forma nella Grecia, sotto la scorta di Talete, di Aristotile, di Platone. Bisogna ben dire che possenti sieno le attrattive, *che sull'uom fornito di solido ingegno spiegan le scienze, giacchè niuno di questi le conobbe senza invaghirsene, niuno se ne invaghì senza promuoverle, niuno le promosse senza compiacersene vivamente. Il sacrifizio di cento vittime, che per una scoperta geometrica Pittagora offerse alle Muse: l'esultanza con cui fuori balzò del bagno Archimede, trovato il rapporto dell'oro misto all'argento nel diadema del re Gerone, provano abbastanza quanto squisita sia la compiacenza dell' anima nel discuoprimento di una verità recondita e sublime. Qual dunque poteva io bramare più stimabile, più insigne destinazione di quella, per cui mi viene ingiunto d'interpetrare ad una gioventù generosa il codice augusto delle scienze esatte; codice scritto coi caratteri più significanti ed istruttivi, voglio dire coi trigoni, coi circoli, colle formole; codice illustre per le più alte dottrine che sommi genj lasciarono qual sacro deposito alla dotta posterità; codice ricco di preziose applicazioni alle arti ed alle scienze essenziali al ben essere dell'umana vita?*

Io conosco, sapientissimi Moderatori, giovani egregj, ascoltatori ornatissimi, tutta l'importanza dell'onorevole incarico addossatomi, e grato alla benignità del Potere Esecutivo, il cui unanime suffragio mi ha prescelto, propongomi di secondare con ogni sforzo le savie mire di lui

non meno che del Gran Consiglio, il qual volle che pur finalmente si stabilisse anche fra noi un Liceo più compiuto e meglio diretto alla pubblica istruzione. Per aggiungere intanto qualche impulso alla gioventù amante de' buoni studj, mi occuperò nel descrivere i rari pregj che caratterizzano le Matematiche scienze. Non vi aspettate elogi equivoci o mendicati; sterili od ampollose amplificazioni. Io vi parlerò collo schietto e nudo linguaggio della verità; ma sarà questi così concludente per se medesimo e così luminoso, che tutti converrete meco, fra le umane discipline non esservene alcuna, la quale possa nella sublimità emulare, imitare nell' esattezza, vincere nell' utilità, quell' ammirabile e quasi sovrumana disciplina ond' io ragiono.

La Matematica, dai Greci chiamata disciplina *per eccellenza, considera i rapporti delle quantità: se queste sieno discrete ella prende il nome di Aritmetica; se continue quello di Geometria, di cui sono una diramazione, la Trigonometria e la scienza delle curve: se le quantità ch' ella contempla sieno costanti ed indeterminate ne risulta l' Algebra; se indeterminate e variabili, il Calcolo Differenziale ed Integrale. Per non impegnarmi in un' indagine che troppo lunga sarebbe e troppo sublime, io mi asterrò dal descrivere le più difficili prerogative di cui le divisate scienze sono tutte dotate: vi esporrò in vece alcune considerazioni generali, che a guisa di pitture in iscorcio, presentino all' occhio que' punti di vista più vantaggiosi i quali s' incontrano nella provincia delle scienze esatte.*

Non istarò dunque a ridire, che ogni vocabolo ammesso nella Matematica è rigorosamente definito: che in essa per ordinario si procede dal semplice al composto: che sempre si parte da proposizioni certe od evidenti: che non si ammette dimostrazione ove le proposizioni intermedie non si conoscano identiche; nè mi tratterrò a spiegare, come il calcolo analitico equivalga ad un linguaggio semplicissimo e regolare, singolarmente adattato alla combinazione di una lunga serie d'idee: basta sciogliere un problema col raziocinio, quindi col calcolo, per vederne la differenza. (3).

Omesse queste facili nozioni mi sollevo a contemplare nella pienezza del suo splendore la scienza che siede regina dell' universo, per mostrare a tutti voi una parte di quella luce vivissima, di cui niun raggio fia mai concesso al volgo ignaro e profano.

Io veggo la sintesi geometrica sulle tracce di una forte meditazione procedere tentando con passo lento e misurato, ma coll' occhio fiso nell'oggetto a cui tende, ma colla mano armata di ardente face che le rischiara il cammino da' primi assiomi all' ultime conseguenze. Veggo le costruzioni sintetiche prestare utile servigio alle arti, e delineando nello spazio il significato delle formole, rendere sensibili colle proprie immagini gli astratti risultamenti del calcolo.

Mi volgo all'analisi, e quali non ravviso in lei divine sembianze! Rapita da irresistibil' estro (4) *fissa ella in prima l'astrus' oggetto della propo-*

sta indagine, indi rapida ne percorre coll' ardente pensiero i rapporti, e prescelti quelli che sono del sospirato arcano la chiave, si affretta di affidarne l'espressione al prepotente magistero de' simboli letterali. Serena calma risplende allora sulla sua fronte, sfavillano i suoi sguardi, apparisce nel suo contegno la compiacenza dell'anima. Già più non si occupa della questione: Voi la vedete obbliarne l'idea, isolarsi per così dire dalla natura, e concentrare di nuovo in sè stessa tutte le forze. Unicamente intesa all' ingegnoso meccanismo di un sicuro algoritmo, ella svolge, trasforma, combina, risolve, nè abbandona la fida traccia delle analitiche regole, finchè nel successivo sviluppamento non incontri un' evidente proposizione, che in forza di un' identica connessione metafisica l' assicuri della verità ricercata. S'ella traduce le verità particolari nel suo linguaggio universale, ecco dalle sue semplici espressioni uscire una folla di verità nuove ed inaspettate; ecco nuovi e generali metodi presentarsi spontaneamente, per servire alla soluzione di tutti i problemi di uno stesso genere. Una sola espressione algebrica dà lume sovente ad una scienza intiera, derivandosi da essa senza fatica un gran numero d' importantissime conseguenze. Che più? L' analisi per mezzo de' suoi risultamenti scuopre quali sieno i problemi assurdi; offre tutte le soluzioni del problema proposto, e somministra poi anche quella de' problemi correlativi. Ma.... se tali sieno i dati di un problema, che malgrado qualunque combinazione, sol ne risulti qualche sfuggevole

elemento della verità ricercata, si smarrisce forse l'analisi o si mostra men grande? Cercandosi la lunghezza di una curva qualunque, altro non si ottiene che il limite a cui la lunghezza richiesta tende indefinitamente: se vuolsi la curva formata da un filo sospeso pe' suoi estremi, non si discuopre che un suo elemento infinitesimo. Ecco dunque trasportato lo spirito in un mondo intellettuale trascendente, sublimissimo: senza nuovi principj, senza nuove regole, non v'è speranza per lui di alzare il difficil velo che asconde ai profani gli ardui misteri della natura. Ebbene: se l'analisi lo assiste ei non ha che temere. Data un' espressione variabile, ella insegna a trovarne il limite o l'elemento infinitesimo: dato questo ella risale all'espressione variabile che gli appartiene. Ottenuta così la soluzione di questi due problemi generalissimi, che respettivamente costituiscono il Calcolo Differenziale e l'Integrale (5), *più non avvi nella natura verità sì ritrosa ed inaccessibile, che all'imperiosa forza non ceda delle analitiche formole. Fuggano pur dal sole ardenti e rapide le comete; sieno pur da noi divisi per enorme spazio Saturno ed Urano, non per questo si sottraggon essi all' indagine dell' acuto calcolatore.*

Voi già vi accorgete, Ascoltatori umanissimi, che l'orazione mia piega spontaneamente verso lo scopo primario cui è diretta, voglio dire alla descrizione delle applicazioni pregevolissime, di cui la società è unicamente alla matematica debitrice.

Il primo vantaggio che l'uomo ritrae dallo studio della Matematica consiste in un' efficace istruzione dell'intelletto.

Gli oggetti che ciascuno può proporsi nello studio della verità, si riducono a distinguere il vero quando si esamina, a dimostrarlo quando si conosce, a scuoprirlo quando si cerca. Tutto è problema nella vita umana, e l'uomo nelle sue deliberazioni altro non fa che sciogliere abitualmente questioni determinate o indeterminate, prevalendosi dei dati che la sua sagacità sa rintracciare nelle circostanze stesse del problema proposto. Or quali sono le operazioni primarie che l'intelletto impiega nelle sue deliberazioni? Percezione, giudizio, raziocinio, dimostrazione e metodo. Vediamo come la Matematica perfezioni l'intelletto nell'esercizio di queste.

I difetti della percezione e del giudizio nascono tutti, o dalla incompleta costituzione delle idee su cui si fondano, o dall'oscurità de' vocaboli con cui s'esprimono, o dalla mancanza stessa de' segni a ciò necessarj. Per prevenire tali difetti i Geometri hanno proporzionato al bisogno il numero de' vocaboli, e si sono prefissa la legge di rigorosamente definirli. Quindi l'uso, arbitro d'ogni linguaggio, ha rispettato maisempre quello della Matematica, e gl'immensi suoi progressi da Talete *sino a* Lagrange, *l'hanno arricchito bensì di nuovi segni e vocaboli, ma senza privarla di quelli ond'era in possesso. Quando si dicea due mil'anni sono, che il quadrato dell'ipotenusa eguaglia la somma di quelli de' cateti corrispondenti, esprimevasi la stessa verità che*

al presente si esprime, perchè i vocaboli, angolo retto, quadrato, ipotenusa, cateto, *sempre hanno rappresentate le stesse idee.* (6)

La perfezione del raziocinio esige una chiara enunciazione delle proposizioni ond' è composto, ed una evidente deduzione delle medesime. I Matematici si sono assicurati di ambedue queste doti, prima colle avvertenze sopra esposte, quindi con escludere ogni supposizione gratuita, con inserire esattamente le idee intermedie, con assumere per base una proposizione evidente se si procede per sintesi, e con ricondurre ad una simile proposizione il discorso qualora procedasi per analisi. Queste precauzioni basterebbero per conciliare ai raziocinj, e quindi alle dimostrazioni della Matematica, quel credito che loro è dovuto. Evvi però una ragione intrinseca, la quale stabilsce su di un fondamento inconcusso la certezza, sì de' suoi raziocinj che delle sue dimostrazioni, indipendentemente da qualunque estrinseca precauzione e da qualunque regola. Tal ragione consiste nella natura delle idee complete che la Matematica impiega nelle sue combinazioni, poichè queste idee sono tali, che tutte le loro proprietà necessariamente derivano dalla proprietà stabilita per caratteristica principale. Una dimostrazione matematica sebbene oscura, confusa od inesatta, non per questo lascia di condurre alla cognizione del vero chiunque segua con sagacità il filo della medesima, perchè non può egli fare a meno di rettificarla e dedurne la conseguenza richiesta.

Rapporto al metodo che osservasi nella Matematica, nulla può idearsi che più sia per l'umana ragione soddisfacente, nulla che più sia luminoso. Qualor si ragiona con metodo sintetico, si parte da una proposizione per se manifesta; da questa si deducono delle proposizioni successive, fra loro strettamente connesse come conseguente ed antecedente, e si prosegue in tal guisa finchè si trovi per ultimo conseguente la verità che deesi dimostrare. Se si ragiona per analisi, si pianta per base la verità che si cerca, e supponendo ch'ella sussista, se ne deducono per mezzo di opportune combinazioni e trasformazioni varie conseguenze successive, immediatamente fra loro dipendenti, o come dicono i Logici identiche fra di loro, e s'inoltra in questa guisa il discorso, finchè pervengasi ad un conseguente, la cui verità sia certa ed incontrastabile. Questo che appellasi metodo di risoluzione, *è l'unico metodo che la natura suggerisce per discuoprire le verità incognite; il metodo a cui l'uomo è debitore delle sue più fine invenzioni. L'analisi superando con armi potenti gli ostacoli che le si oppongono, s'apre una sicura strada alla verità che ricerca: la sintesi ricalcando com'è suo stile, con passo retrogrado le orme dell'analisi, altro non fa che appianare e sparger di luce il sentiere dall'analisi aperto.*

Questi due metodi inversi, specialmente se affidati sieno ai simboli del calcolo numerico e letterale, sono dunque certi ambedue, e conducono al discuoprimento ed alla dimostrazione del vero. Il calcolo, disse molto bene l'elegantis-

simo Fontanelle (Préf. à la Géom. de l' Inf.) il calcolo è nella Matematica ciò che nella Fisica è l'esperimento, e le verità per mezzo di esso rintracciate possono tenersi per verità sperimentali. Egli è vero che i Matematici hanno talvolta agitate fra loro delle controversie lunghe e difficili, ma in tal caso si sono essi dipartiti dai loro principj; hanno abbandonato il metodo proprio della loro scienza. E chi non sa che di tutto può l'uomo abusare? La quistione sui fondamenti del Calcolo Differenziale e quella delle forze vive svanirono immediatamente, appena furono rigorosamente stabilite le nozioni che esser dovean la base de' raziocinj analitici. Peraltro, una quistione molto è distante da un errore, e nel codice delle scienze esatte non si registra un teorema, ove distinti non appariscano i caratteri della certezza.

Eccovi, Uditori ornatissimi, dimostrato brevemente come la Matematica istruisca l' uomo nell' esercizio delle sue facoltà intellettuali. Essa lo prende per mano, e guidandolo per sentieri talvolta disagiati, sempre sicuri, lo avvezza a prendere nello studio del vero quelle direzioni che le variabili circostanze possono suggerire. Dia pur la Logica delle regole astratte, capaci di allontanare dall' errore i meno accorti (7); essa mai non formerà colla sua teorica un sagace ragionatore; laddove la Matematica con le sue pratiche lezioni porterà sempre l' uomo all' apice di quella perfezione di cui è capace. Si dimentichi pur egli le dottrine che apprese col soccorso delle figure e del calcolo: il suo ingegno sempre

conserverà una maggiore attitudine al dritto e profondo raziocinio: una fine perspicacia ed un giusto criterio lo distingueranno sempre dall'uomo incoerente e superficiale. Non contenta però la Matematica di perfezionare l'umano ingegno con un' efficace e straordinaria istituzione, ella mirabilmente provvede anche ai bisogni ed ai comodi della vita. Infatti noi dobbiamo alla Geometria elementare la misura de' nostri campi, ed il proporzionale spartimento de' medesimi: quindi la facilità de' contratti nel partaggio delle eredità e nell'acquisto de' fondi. Noi dobbiamo alla Geometria descrittiva l' esatta esecuzione de' disegni e la maniera di rilevarne il significato preciso; quindi le costruzioni della prospettiva, la determinazione dell' ombre, e la grafica rappresentazione di molti oggetti difficili a concepirsi ed essenziali alle arti meccaniche. Noi dobbiamo alla Trigonometria la misura delle distanze inaccessibili, il calcolo delle latitudini e delle longitudini e l' Astronomia sferica; quindi la Geografia, scienza indispensabile per lo studio della storia antica e moderna; per le grandi spedizioni terrestri e marittime, sì guerriere che commerciali; pel discuoprimento di nuove terre, per la cognizione del globo (8). *Noi dobbiamo alle curve coniche i fondamenti dell'Astronomia Fisica ed all'analisi il compimento di questa: quindi l'esattezza della nostra Cronologia, la correzione delle nostre carte geografiche, il sicuro ardimento della navigazione moderna, e la cognizione che abbiamo dell'universo.*

Lungo troppo sarebbe il descrivere le applicazioni dell' analisi alla dottrina del baratto mercantile e dell'interesse, al calcolo dell'umana vitalità e delle probabilità d'ogni genere: le applicazioni alla Ballistica, ormai divenuta un codice geometrico: le applicazioni ai problemi sulla rifrazione e sulla diffrazione della luce, da' quali dipende la posizione de' corpi celesti e la perfezione de' telescopj: le applicazioni alla teoria delle machine, per cui l'uomo, sostituita la forza degli animali e degli elementi alla sua, altra occupazione non si riserva che quella della sua intelligenza: le applicazioni all' Idraulica, che armata di sperimenti, di formole e di machine, apre nuovi canali alla navigazione, conduce emissarj a traverso de' monti, unisce insieme opposti mari, feconda ed arricchisce province ed imperj: Le applicazioni alla musica, alla Gnomonica, all'Architettura, all'Economia pubblica (9) *al moto muscolare* (10) *ed a tutto ciò finalmente che dipende da qualunque siasi regolare combinazione, od al non equivoco impero soggiace di fisiche leggi.*

Noi siamo avvezzi, uditori ornatissimi, a profittare degl' inestimabili vantaggi che dalla matematica ci provengono tutto giorno, o senza saperne l' origine o senza considerarne i rapporti: l'uso stesso molto in noi diminuisce quel sentimento di stima che a lei si debbe. Ed a che serve la Matematica? ho inteso più volte ripetersi da persone splendidamente educate nell' ignoranza. A che serve la Matematica? Serve a raffinare l' intelletto nello studio delle scienze;

serve ad infondere nello spirito inusitata giocondità, frutto delle sublimi sue speculazioni; serve a raddolcire le amarezze della vita, a rendere l' uomo felice e longevo (11). Parvi forse poco benefizio questo uditori, *disse già il celebre* Torricelli *nella* 9.ª *sua Lezione Accademica*, che mentre voi abbiate un ingegno lucido si trovi una scienza sì nobile, che da se sola sia bastante ad appagare il vostro intelletto, e a dar cibo d'ingegnoso trattenimento alla cupidigia di qualunque curioso speculatore? Che frutto d' interna consolazione stimate voi che raccolga un animo veramente filosofico, dedito alla cultura di una scienza, gl'insegnamenti della quale non sono opinioni di dottori o fantasie d'uomini, ma beneplaciti divini e verità indubitate ed eterne?

Non altri che il cieco dalla nascita può ignorare a che serva la luce: non altri che un imbecille, che uno stupido, può chiedere a che serve la scienza maestra dell'umano ingegno; quella scienza che trasse il mondo dall' orrido stato della primitiva selvatichezza, e che preparò sicuri mezzi per l'universale incivilimento. Trasportiamoci per un istante ne' secoli che a stento videro balenare qualche raggio di scientifica luce. Ecco una fosca eclisse, ecco una minacciosa cometa, spargere d'improvviso nelle nazioni lo spavento e'l terrore. L'armata di Nicia, *per una mal temuta oscurazione dell'astro diurno, soccombe all' impeto ostile, e la caduta di Atene non ha riparo: una gran parte dell'Europa, sul fine del secolo XII* (1) *aspetta da un' immagi-*

(1) Nel 1186

naria congiunzione de' pianeti l' ultimo eccidio : i fiumi e i torrenti indocili soverchiano le sponde, e divorate le speranze de' coloni , portano la macilenta fame nelle sterilite campagne. I nocchieri, privi di carte geografiche , ignari de' Medicei satelliti , radono paurosi le coste, ed osano appena salutar da lungi le temute colonne d' Ercole e la venerata ultima Tule (12). *Per difetto di Geografia perisce ne' deserti dell' Asia una gran parte dell' esercito alemanno diretto alla conquista de' luoghi Santi* (13). *La cronologia sconcertata indica il principio della primavera in mezzo al verno, e non evvi un* Sosigene *che provveda a sì strano sconvolgimento , non un* Giraldi *che stabilisca una correzione permanente* (14). *Le date principali dell' antica storia , ignorandosi il calcolo dell' eclissi , non possono verificarsi* (15)*: pendolo , meridiana, telescopio, son nomi ignoti: nell' ignoranza della scienza geometrica invano cercasi un oratore* (16)*; per difetto di cognizioni astronomiche più non s' intendono gli storici ed i poeti Greci e Latini; niuna idea di agrimensura; l' architettura meschina ed informe; la ballistica e la tattica senza regola* (17)*, il commercio ristretto e difficile , la società priva di mille comodi , assediata da' bisogni , immersa ne' pregiudizj ,..... chieggasi adesso a che serve la matematica.*

Perdonate di grazia, Uditori umanissimi, s' io trasportato da un ardente zelo pel decoro della più bella fra le scienze umane , scienza che gl' intelletti apre e sublima (18)*, scienza ch' è fonte d' ogni sapere, scienza amica dell' uomo e della*

civil società prim' ornamento e sostegno, mi sono diffuso nel difenderne l'inesausto merito dalla stolta censura di coloro, che la dispregiano per non confessarsi ignoranti di un' essenziale disciplina. Voi troppo saggi, voi troppo siete illuminati, per lasciarvi sedurre dalle imposture di chi odia la luce, di chi pospone ad una vanità frivolissima il ben essere della società, nel cui seno gode mormorando i non meritati benefizi delle scienze calcolatrici: Io sono anzi persuaso che voi non cessiate di promuovere colle vostre insinuazioni lo studio di cui favello; studio ch' è ormai divenuto indispensabile e che la misura costituisce dell' umana cultura. Resta solo ch'io prima di por fine al mio ragionamento mi rivolga alla gioventù che mi ascolta, per esortarla ad entrare coraggiosa nella carriera de' più grandi genj onde l'umana specie altamente si onora.

Qual parte, Giovani riveriti, volete voi coltivare della severa o dell' amena letteratura? Vi alletta forse lo studio della storia? Vi conviene possedere la Geografia sì moderna che antica, poi la Cronologia, quindi l' arte di verificare le date, arte inseparabile dal calcolo dell' eclissi. Vi piace di riuscire con lode nell' eloquenza? Studiate la natura, imitate i grandi esemplari, ma imparate la Geometria e coltivate le scienze. Cicerone *e* Quintiliano *vi escludono senza queste condizioni dallo stuolo degli oratori.*

Amereste voi di porre il piede ne' sacri penetrali della dotta Filosofia? Stassi Pitagora *sulla soglia per chiedervi se a dovere siete istruiti*

nelle dottrine geometriche (19) *Il consiglio dato da* Ippocrate *a* Tessalo *suo figlio* (20) *di studiare l'Aritmetica e la Geometria, ed il simile avvertimento di* Boheraave *vi avvertono, che non osiate tentare il venerato oracolo del misterioso* Esculapio *senza il corredo degli elementi matematici.*

Sareste mai chiamati all'ecclesiastico ministero? Ebbene: o l'eloquenza, o la filosofia, o l'antica storia sacra e profana, debb'essere vostra speciale professione (21).

Io non istarò ad inculcarvi che imitiate i sommi padri dell'antica legge, Abramo *e* Mosè, *che a fondo conobbero le discipline tutte de' loro tempi: non vi consiglierò col dottissimo Vescovo d'Ippona lo studio dell' astronomia, come di una facoltà essenziale alla cronologia, e che mirabilmente dimostra l'esistenza e la grandezza del Creatore: mi asterrò dal ripetervi gli elogi con cui S.* Gregorio Nazianzeno *esaltava S.* Basilio *suo maestro per la straordinaria sua dottrina nell'Aritmetica, nella Geometria e nella Fisica celeste: non vi farò menzione della sovrana munificenza con cui* Sisto *IV premiò il valore del matematico* Regiomontano; *nè vi rammenterò i preclari nomi, del Cardinale di* Cusa (22), *del Vescovo* Artus (23) *di* Cavalieri, Grandi, Jacquier, Boscovich, Ximenes, Riccati, Frisi, Saladini *e cento altri, che l'ornamento furono e la gloria del sacro loro Istituto.*

Se non vi scalda il seno bella fiamma d'onore; se vivace desio di conoscere le arcane maraviglie della natura non vi risveglia, lasciate pure c' altri di voi più generoso, tenti con difficil volo le

sublimi regioni dell' analisi superiore, che rendasi benemerito della patria, e stabilisca saldo monumento al suo nome: ma se vegetar non volete nella società quai piante parassite; se non vi aggrada c'altri vi creda numero vile e prossimi all'indisciplinabile specie dell'orang-utang (24), *studiar v' è d' uopo gli elementi almeno delle scienze esatte, onde correggere ed avvalorare il vostro ingegno, e distintamente abilitarvi a qualche liberale facoltà. Non si pretende da voi che per istruirvi andiate nella remota Iberia, come il celebre* Gerberto, *poi* Silvestro *II Pontefice: non che studiate, com egli fece, codici oscuri ed informi: non che diffondiate al paro di lui le cognizioni matematiche frà popoli semibarbari. Senza che rinunziate un istante agli agi domestici, voi avete nella patria ed ottimi libri e dottissimi istitutori e compagni eruditi: voi vivete in una colta società dove si aggiungerà stimolo alla vostra diligenza, si farà plauso al vostro progresso, si concederà premio al vostro valore. Risolvendovi, come spero, di coltivar con ardore lo studio che vi propongo, tutte per voi facili diverranno le discipline; in alcuna potrete agevolmente segnalarvi, e le cattedre dell'università, gl' impieghi del Foro, le cariche primarie dello Stato, offeriranno convenevole guiderdone al vostro merito. Ponderate quanto vi hò detto e decidete.*

ANNOTAZIONI

(1) Così *Vossio* De nat. art. lib. 3. cap. 30. *Goguet* De l'orig. des loix, des arts, et des sciences vol. 1. p. 215. *Marsham* per altro (Canon cronicus) vuole che l'Astronomia sia nata in Egitto, e *Luciano* dice che sono stati gli *Etiopi* i primi maestri degli Egiziani.

(2) In grazia delle ricerche fatte dagl'Inglesi nell'Indie, sappiamo che quei popoli possedeano sino dall'antichità più remota ed immemorabile cognizioni molto difficili di Geometria, mentre in un antichissimo libro de'Bramini intitolato *Ayeen-Akbery*, si è riscontrata un'elegantissima espressione del rapporto fra la circonferenza del circolo ed il diametro, rapporto che dipende da un poligono regolare inscritto e circoscritto, di 768 lati.

(3) Non è vero che l'inesattezza delle scienze derivi, come opinò *Condillac*, dall'imperfezione del loro linguaggio. Per quanto semplice e regolare questi fosse, composto anche di un ristretto numero di voci tutte monosillabe o dissillabe, come il regolarissimo idioma Chilese, in cui non si contano che circa 2000 voci, quasi tutte della misura sopra indicata, tuttavia mancherebbe alle scienze anzidette la semplicità e la certezza de' principj, ed una dimostrata regolarità della loro maniera di agire. Tali sono nella Meccanica le leggi dell'equilibrio e del moto; tali nell'Astronomia le leggi dell'attrazione, e le così dette leggi planetarie di *Keplero*.

(4) *Fissare* significa guardare fissamente, non già stabilire e costituire:

(5) La contrastata Metafisica del Calcolo Differenziale mal potrebbesi adombrare con un astratto ragionamento.

(6) Il raffinamento de' metodi e delle teorie ne ha rettificati parecchi e ne ha eliminati pochissimi, come *fibula*, *apotome*, *trigono vicario*.

(7) Le regole sono come i ripari su i ponti, che non servono a far caminare i passeggieri ma solo ad impedire ch' essi cadano nel fiume (*Condillac* Logica.)

(8) Le carte *ridotte* di *Wright* furono molto utili alla scienza del pilotaggio.

(9) *Canard* - Principes d'Economie Politique Paris 1801.

(10) Hanno profondamente scritto su questo sublime argomento *Borelli*, *Lambert*, e *Fossombroni*.

(11) Noi stiamo formando un registro che comprende in ordine cronologico la respettiva età di tutti i matematici insigni sin quì conosciuti, con l'idea di ricavarne la vita media de'matematici, e da questo lavoro, apparisce fin d'ora assai superiore la loro longevità.

(12) Gli Argonauti, per aver traversato il mare di Marmara furono riguardati come uomini prodigiosi (*Cassini*; Orig. dell'Astron. p. 1.) gli eroi della Grecia per valicare l'arcipelago prendeano scrupolose misure e faceano straordinarj preparativi (*Odissea* lib. 3.). Virgilio conduce la flotta d'Enea lungo le coste della Grecia, e per iscansare lo stretto di Messina gli fa seguire il circuito della Sicilia.

(13) Veggansi gli *Estratti Storici* di *Hammer*.

(14) *Sosigene*, recatosi d'Alessandria a Roma per ordine di *Giulio Cesare* aggiunge 67 giorni all'anno 708, che fu detto *anno della confusione*: ne determinò la durata a 365 giorni e 6 ore, mentre per l'innanzi era di giorni 355, e stabilì l'intercalazione di un bisestile al termine d'ogni 4.° anno; regolamento che fu scolpito in bronzo sotto *Cesare Augusto*, onde servisse di norma al popolo ed a' Pontefici.
(15) *Costard* (Hist. of Ast. p. 236) ha dimostrato mediante il calcolo dell'eclissi solari che il termine della guerra fra i Lidj ed i Medi corrisponde all'anno 603 avanti l'E. C. e che dee riferirsi all'anno 478 la spedizione di *Serse* contro la Grecia, spedizione che dianzi supponeasi avvenuta l'anno 480. Con questo metodo egli concilia *Senofonte* ed *Erodoto* per rapporto all'epoca in cui *Ciro* conquistò la Media. Vegganṡi gli aurei elementi di cronologia di *Gabriele Manfredi*.
(16) *Quintiliano* Lib. I. Cap. X. sul fine.
(17) Il celebre Nicolò Tartaglia Bresciano fu il primo, per quanto a noi sembra, che ne diede una qualche teoria nella sua *Scienzia Nuova* pubblicata nel 1554.
(18) Così il chiarissimo Poeta *Vincenzo Monti* nella Cantica in morte di *Mascheroni*.
(19) Tutti sanno ch'ei scrisse sulla soglia della sua scuola: *Niuno entri se non possiede la Geometria*.
(20) *Montucla* (Hist. des Mathem. p. 17.)
(21) *S. Agostino* (De Doctr. Christ. Cap. 16 e 37.) e *S. Girolamo* (Epist. 3.) sostennero esser necessaria la scienza de'numeri per l'intelligenza delle Sacre Carte.
(22) Ei coltivò con impegno l'Astronomia e diede anticipati saggi del sistema Copernicano.
(23) Questo illustre Vescovo di Gap in Francia pubblicò un ingegnoso libro, intilolato: *Curvilineorum Amaenior contemplatio*, an. 1654 in 4.°
(24) Si allude ai mediocri ingegni cioè alla massima parte degli uomini. Questi, senza lo studio delle Matematiche sempre saranno inetti a qualunque disciplina, ed in parte verificheranno ciò che per amplificazione è stato detto. È inutile rammentare il *verbum ardens* di Cicerone e *l'eccesso amplificativo* di Aristotile.

SCIENZA DEL CALCOLO

PARTE I.

CALCOLO ARITMETICO

Inter omnes artes liberales ac scientias contemplatrices præcipuam maximeque divinam esse numerandi scientiam, nec artem nec regionem, ullamque doctrinam posse sine numeris stare. Platone nell'Epimenide.

§. 1. L'idea di n.° (1) nasce dalla simultanea percezione di più cose simili, e si estende in seguito alle cose dissimili. Il fanciullo che naturalmente si va iniziando nell' arte di computare, dee necessariamente (2) aver detto seco stesso: una pera ed una pera sono due pere; indi che una pera ed una mela sono un frutto ed un frutto ossia due frutti; poi che una mela ed una pera sono un corpo ed un corpo cioè due corpi, e finalmente che una cosa ed una cosa sono due cose, che uno ed uno sono due, considerando le due cose come aventi una qualità simile, per

(1) Noi adottiamo le seguenti abbreviature: n.° (numero) prec. (precedente), seg. (seguito, e seguente), ipot. (ipotesi), ed alcune altre che accenneremo.

(2) *Condorcet - Moyens d'apprendre à compter surement et avec facilité* Paris an. VII. p. 78

rapporto a cui si possono riguardare come le stesse.

L' unità cui un dato n.° si riferisce può essere qualunque come in 2, 9 ec. e può essere di una determinata natura come in 3 libbre, 7 braccia ec. Nel 1.° caso il n.° dicesi *astratto*, *concreto* nel 2.°

L'unità di un n.° concreto dovendo essere estesa, può indefinitamente accrescersi e diminuirsi. Per esempio un n.° composto di canne, braccia, once, ec., n.° che dicesi *complesso*, perchè corrisponde ad unità di diversa specie le une *aliquote* dell' altre, dimostra che si può protrarre oltre ogni limite la serie delle suddivisioni a destra come quella de' multipli a sinistra.

§. 2. Gli uomini alquanto civilizzati spesso trovansi nella necessità d' indicare altrui un determinato n.°; quindi il sistema della *numerazione*, per cui con pochi segni tutti i n.ⁱ possibili facilmente si esprimono. Evvi un sistema *vocale* ed un sistema *caratteristico*. Il vocale è il primo a formarsi, perchè prima nasce il bisogno di significare agli astanti con suoni articolati l' idea di alcuni n.ⁱ, in seguito si trova espediente di fare lo stesso con gli assenti; per lo che si richiedono alcuni caratteri, ed un sistema che faccia dipendere l' espressione di qualsivoglia n.° da una semplice e regolare combinazione de' caratteri stessi. Il migliore fra tutti i sistemi possibili è il sistema *Cinese* (1), recato dagli Arabi

(1) Nel dottissimo giornale intitolato *Le miniere dell'Oriente*, che si stampa in Vienna sotto gli auspicj del Sig. *Conte Rzewusky*, evvi una memoria del Cav. *Hager*, in cui si prova che le così dette cifre Arabe sono invenzione de' Cinesi.

nell' Europa; sistema comune a tutte le nazioni, ed i cui caratteri, o cifre

0, 1, 2, 3, ... 9,

hanno oltre il valore assoluto un adattato valore di posizione. *Una cifra diventa decupla se alla sua destra se ne colloca un' altra, centupla se due*, ec. è il fondamentale principio del sistema; principio che deesi ascrivere fra le più importanti invenzioni dell'umano ingegno.

Lo stesso principio che rende decupla una cifra a sinistra delle unità semplici, fa sì che debbasi riguardare com' esprimente decime di unità quella ch' è situata alla destra di queste. Così mentre 5 in 51 esprime 5 diecine, 5 in 1,5 si riferisce a 5 decime: la virgola distingue le unità dalle sue decime. Nella stessa guisa la cifra 3 posta alla sinistra di 51, rappresenta tre unità di centinajo, dieci volte maggiori delle unità di diecina, mentre la stessa cifra in 51,53 è il simbolo delle centesime. Succedono a queste le millesime, indi le decime millesime ec. Ecco un n.° col respettivo valore d' ogni cifra, secondo lo stile Italiano e Tedesco.

... $34\overset{2}{6}$. 243. $79\overset{1}{4}$. 376. 221, 457. $67\overset{1}{8}$. ...

346.	243.	794.	376.	221,	457.	678.
cent. di bil.	centin. di migl. di mil.	centin. di mil.	centin. di migl.	centinaja	decime	dec. milles.
diec. di bil.	diec. di mig. di mil.	diec. di mil.	diec. di migl.	diecine	centes.	centes. milles.
blioni	migliaja di mil.	milioni	migliaja	unità	milles.	milliones.

Il punto inferiore indica migliaja a sinistra della virgola, millesime a destra: le cifre superiori 1, 2, 3 ec. indicano respettivamente da una parte milioni, bilioni, trilioni ec., dall' altra milionesime, bilionesime, trilionesime ec.

Per esempio il n.° $221,\,45\underset{\cdot}{7}\;67\overset{1}{8}\;37\underset{\cdot}{6}$ si pronunzia

Duecento ventuno, quattrocento cinquanta sette mila seicento settantotto milioni, trecento settanta sei millesime milionesime.

Il punto e la respettiva cifra superiore si assegna alternativamente ad ogni 3.ª cifra partendo dalle unità semplici.

È stile Francese, Inglese e Spagnolo riferire la 4.ª terna ai bilioni, la 5.ª ai trilioni ec.

§. 3. Un n.° della forma .... 221, 457 .... n.° che dicesi *decimale*, si rende dieci, cento, ec. volte maggiore, portando respettivamente la virgola fra le cifre 4 e 5; fra le cifre 5 e 7, ec., il che costituisce un *passo*, *due passi* ec. della virgola a destra. Lo stesso n.° si rende 10, 100 ec. volte minore promovendo la virgola di un passo, due passi ec. verso la sinistra.

§. 4. L' unanime consenso delle nazioni nell' uso del sistema decimale non senza ragione si vuol ripetere dal numero delle dita di ambe le mani (1). Fortunatamente il sistema onde si tratta riunisce nel miglior modo possibile le necessarie prerogative, le quali sono 1.° che il n.° de' caratteri sia ristretto: 2.° che il valore di posizione progredisca con una semplicissima

(1) *Condorcet* (Op. cit.) *Ozanam* (Nuove Ricreaz. Matem), ec.

legge: 3.° che l'indole del sistema favorisca nel miglior modo la facilità delle operazioni: 4.° che la *base* del sistema (10 nel decim.) abbia un sufficiente n.° di divisori.

§. 5. Come il n.° 0, 4. esprime $4/10$ dell'unità, 0,45 n' esprime $45/100$ ec. così $3/5$ indica che l' unità è stata divisa in 5 parti e se ne sono prese 3, I n.^{i} $4/10$, $45/100$, $3/5$ ec. diconsi *frazioni* o *rotti*: il n.° superiore alla linea n' è il *numeratore*, l' inferiore il *denominatore*. Il 2.° dà la denominazione alle parti in cui l' unità si è divisa, il 1.° enumera quante se ne sono prese. La frazione è impropria se il 1.° eguaglia o supera il 2.° Nel 1.° caso il rotto è = 1 : infatti $5/5$ significa che si sono prese tutte le 5 parti in cui l' unità era stata divisa: nel 2.° il rotto supera l' unità; $6/5$ per es.° equivale a $5/5 + 1/5$ cioè ad 1 più $1/5$. D' ora innanzi scriveremo + invece di *più*, e − invece di *meno*: il 1.° è simbolo di addizione, di sottrazione il 2.°

Il valore di una frazione varia come il suo numeratore: raddopiando 3 in $3/5$ si ha $6/5$ doppio di $3/5$: triplicandolo risulta la frazione tripla $9/5$, ec. Succede il contrario se la variazione si fa nel denominatore. Per esempio la duplicazione di 5. in, $3/5$ dà $3/10$ ch' è la metà di $3/5$: viceversa prendendo la metà di 6 in $1/6$ ne risulta $1/3$, doppio di $1/6$. Dunque un rotto non varia se ugualmente si accresce o si diminuisce l'uno e l' altro suo termine (numeratore e denominatore). Si ha per es.° $3/5 = 6/10 = 12/20$ ec. dove il segno = indica eguaglianza In seg. faremo uso de' segni < e >; il 1.° significa *minore* come 3 < 7 (3 *minore* di 7), il 2.° equivale alla parola *maggiore*.

§. 6. Una frazione si rende più semplice dividendo i suoi termini per uno stesso n.° Ciò non si trascura giammai. A tale oggetto accenniamo per ora le seguenti regole.

I. I n.[i] pari sono divisibili per due: II. per 5 se tale è l' ultima cifra: III. per 10 se finiscono con lo zero: IV. per 3 se la somma delle cifre è multipla di 3. V. per 9 se multipla di 9. La ragione delle due ultime regole si vedrà nella Teorìa de'numeri (T IV) Due n.[i] che non hanno alcun divisore comune diconsi n.[i] *primi relativi*: un n.° non divisibile per alcun altro è n.° *primo assoluto*.

§. 7. I termini di due rotti equivalenti formano una *proporzione geometrica*, ed invece di $3/5 = 6/10$, $6/10 = 12/20$, ec. sovente si scrive

$$3 : 5 :: 6 : 10; \quad 6 : 10 :: 12 : 20.$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE.

(*Veggasi la Tav. sul fine del Calc. Arit.co*)

§. 8. La sottrazione dà la riprova dell'addizione. Per rapporto al 1.° esempio debbono essere identici i risultamenti che sieguono:

2087, 655	432, 234
−978, 989	676, 432
1108, 666	1108, 666

Si ha la riprova della sottrazione osservando se la somma del residuo e del n.° minore coincide col n.° maggiore. Dev' essere per esempio 97, 801 = 12, 369 + 85, 432. L' identità de' risultamenti nel 1.° e nel 2.° caso produce una

veemente probabilità non un assoluta certezza, perchè fra i casi possibili evvi quello estremamente difficile, che nell' operazione principale e nella riprova corrispondente siasi commesso un errore uguale e contrario, la cui reciproca compensazione abbia salvata l' identità de' risultamenti. Per rimuovere ogni ombra di scrupolo, basta fare una 2.ª riprova sottraendo dalla somma 2087, 655 il 2.° n.° 676, 432, ed osservare se la differenza 1611, 223 sia = 432, 234 + 978, 989.

Per rapporto alla sottrazione si può togliere il residuo dal n.° maggiore, e sperimentare se la differenza coincida col n.° minore.

MOLTIPLICAZIONE (*Tav. cit.*)

§. 9. La moltiplicazione è un compendio dell'addizione. L' operazione esposta nel 1.° esempio è sostituita alla somma di 35 n.ⁱ eguali a 97. Il n.° che deesi aggiungere a se stesso, ossia che si dee ripetere più volte, dicesi *moltiplicando*; è il *moltiplicatore* quello che indica quante volte il moltiplicando dev' esser preso: si dà il nome di *prodotto* al risultamento della moltiplicazione. Quest' operazione s' indica col segno ×. Per comprendere la ragione su cui è fondata si osservi che $97\times35=97\times5+97\times30$; che per esprimere $5\times7=35$ si scrive 5 nel luogo delle unità e si uniscono le tre diecine al prodotto 9×5; prodotto la cui 1.ª cifra si scrive nel rango delle diecine perchè il fattore 9 esprime diecine. Si passa a moltiplicare 97 per 3, e perchè la cifra 3 indica diecine,

le cifre del prodotto 291 si promuovono di un rango verso la sinistra, il che equivale all' addizione di uno zero finale.

L' operazione del 2.° esempio è fondata sugli stessi principj: conviene avvertire soltanto che si trascura la virgola e si separano nel prodotto tante cifre a destra, quante sono le decimali de' due fattori di esso. La ragione si è, che sopprimendo la virgola viensi a moltiplicare ciascun fattore per l' unità seguita da tanti zeri quante sono le sue decimali. Nel caso attuale ciascun fattore vien moltiplicato per 100, il prodotto risulta 10 mila volte maggiore, ed il suo aumento resta compensato dalla separazione di 4 cifre a destra.

Per rapporto ai rotti si vede che $4/7 \times 3$ è $= 4/7 + 4/7 + 4/7$. Così $3/7 \times 2/5$ equivale ad $1/5$ di $2 \times 3/7$ ossia di $6/7$. Basta dunque rendere 5 volte minore il prodotto $6/7$, e ciò si ottiene con rendere 5 volte maggiore il denominatore 7.

La moltiplicazione del 4.° esempio esige unicamente la riduzione dell' uno e dell' altro fattore alla respettiva unità dell' infima specie.

DIVISIONE (*Tav. cit.*)

§. 10 La divisione è un compendio della sottrazione. Per sapere quante volte il 5 si contiene in 35 basta sottrarne 5 quante volte si può, e si vede chè ciò può farsi 7 volte esattamente. La cifra 7 dicesi *quoziente*; esso è il risultamento della divisione di un n.° per un'altro. Nell'esempio 1.° la sottrazione di 34 dovrebbe ripetersi

26043 volte. Si stabilisce che 34 cape 2 volte in 88, perchè la 1.ª cifra 3 sta in 8 due volte, ed il residuo 2 posto innanzi alla 2.ª cifra 8, cioè 28, è capace del doppio di 4. Se ciò non si verificasse si diminuirebbe la 1.ª cifra del quoziente. Tolto 34×2 da 88 si scrive accanto al residuo 20 la 3.ª cifra 5; si misura 34 in 205, cioè 3 in 20, e si prende 6 per 2.° quoziente parziale, perchè il residuo 2 posto innanzi a 5, cioè 25, contiene 6 volte il 4, e così in seguito. Il residuo è sempre minore del divisore altrimenti il quoziente sarebbe minore del vero. Per dare una compiuta dichiarazione della regola attuale, noi ci proponiamo di dimostrare 4 importanti proposizioni. Osserviamo intanto 1.° che sopprimendo la virgola nel 2.° es.°, dopo l' addizione di tre zeri in seguito de' 4 decimi, il che non altera il n.°, egualmente si accresce il numeratore ed il denominatore; che $^{731}/_{17000}$ si ha dividendo per 2 i termini di $^{1462}/_{34000}$; che moltiplicando per 1000 il n.° 731 e dividendo 731000 per 17000 si trova per quoziente 43; risultamento 1000 volte maggiore del vero, ed a cui per compensazione si sostituisce 0, 043.

Osserviamo 2.° che dividere $^2/_7$ per 3, vuol dire prendere $^1/_3$ di $^2/_7$; , che $^1/_3$ di $^2/_7$ è un rotto 3 volte minore di $^2/_7$, rotto che si ottiene rendendo tre volte maggiore il denominatore 7.

3.° Che siccome il quoziente cresce nella ragione con cui diminuisce il divisore e viceversa, il quoziente $^2/_7 : {^3/_5}$ dev' essere cinque volte maggiore di $^2/_7 : 3$ ossia di $^2/_3 \times_7$: esso è dunque $= 2 \times {^5/_3} \times _7 = {^{10}/_{21}}$.

4.° Che si riconduce alla stessa regola la divisione 2: $3/5$ sostituendo $2/1$ a 2.

5.° Che $46/209$ è = $460/209$, purchè si divida per 10 il quoziente $2 + 42/209$; perciò $46/209 = 0,2 + 42/2090$. Che $42/2090$ è = $4200/2090$ purchè si divida per 100 il quoziente $2 + 20/2090$, che diviene $0,02 + 2/20900$; ec. onde $46/209 = 0,22...$

Proposizioni fondamentali spettanti alla divisione de' n.i composti.

§. 11. Prop. I. Il quoziente intero che nasce dalla divisione di un n.° intero per un altro eguale o minore, purchè composto dello stesso n.° di cifre, è di una sola cifra. Dim.ne I massimi n.i di una, due, ec. cifre sono 9,99,999, ec. ed i minimi di una, due, ec. cifre, 1, 10, 100, ec. Ma $9/1 = 9$; $99/10 = 9 + 9/10$; $999/100 = 9 + 99/100$, ec. e si sa (§.5) che divis.re = dividendo dà quoziente = 1. Dunque ec.

§. 12. Prop. II. Se il dividendo ha una cifra di più, ma sopprimendo l'ultima non resta capace del divisore, il quoziente è di una sola cifra. Dim.ne L' ultima cifra del dividendo rende decuplo il n.° che la precede, e però decuplo il quoziente ottenuto mediante la divisione del predetto n.° antec. all' ultima cifra, pel divisore dato: ma il quoziente onde si tratta è per ipot. < 1, ed il prodotto di una frazione genuina moltiplicata per 10 è < 10: dunque ec.

§. 13. Prop. III. Il n.° delle cifre ond'è composto il quoziente di due n.i intieri è = 1 + la differenza fra il n.° delle cifre del dividendo e

quello delle cifre del divisore, ovvero = alla predetta differenza. Dim.ne Suppongasi di aver preso sulla sinistra del dividendo un n.° di cifre = a quello delle cifre del divisore, e che tal n.° sia capace del divisore, onde si abbia una cifra del quoziente. Se all' assunto dividendo parziale succede una sola cifra, il n.° dato equivale al decuplo del suddetto dividendo parziale più le unità espresse dalla nuova cifra. Dunque la 1.ª cifra del quoziente dee rendersi decupla, e però gli succede una 2.ª cifra. Non gliene possono succedere due, perchè altrimenti il quoziente diverrebbe centuplo, mentre diviene decuplo il dividendo. Trovata la 2.ª cifra del quoziente si consideri la 2.ª nuova cifra del dividendo, e proseguendo si concluderà ec.

Si verifica la 2.ª parte della proposizione quando con prendere sulla sinistra del dividendo un n.° di cifre uguale a quello del divisore, il n.° che ne proviene non è capace del divisore. La ragione si è che in tal caso il n.° delle cifre componenti il 1.° dividendo parziale supera di un' unità quello delle cifre che costituiscono il divisore. Dato il dividendo ed il divisore è dunque determinato il n.° delle cifre componenti il quoziente.

§. 14. Prop. IV. Niuna cifra del dividendo, la quale sia di un ordine inferiore a quello della cifra che si cerca pel quoziente, non influisce in questa. Dim.ne Sieno da dividersi i n.i 273446; 113446 per 123.

Siccome 273 è capace di 123, il quoziente della 1.ª divisione è composto di 4 cifre, n.° $= 1 + (6-3)$, coerentemente alla proposizione III. La 1.ª cifra

del quoziente, restando le stesse le prime tre del dividendo, è necessariamente = 2, nè diverrebbe maggiore se il dividendo fosse 273999. Dunque la 1.ª cifra del quoziente, cifra ch' esprime migliaja, non dipende dalle cifre di un ordine inferiore al migliajo. Tolto 2×123 si ha il nuovo dividendo 27446, e perchè 274 contiene due volte 123 si ha 2 per 2.ª cifra del quoziente, cifra esprimente centinaja e indipendente dalle ultime due cifre: Così ec.

Passando alla divisione di 113446, si vede che il 1.° dividendo parziale è 1134, che la 1.ª cifra 9 del quoziente, cifra ch' esprime centinaja, non dipende dalla penultima cifra, e così in seguito.

Ciò che si è detto per rapporto agli esempi prec. può applicarsi a qualunque altro, e però si può concludere ec.

§. 15. Per verificare l' esattezza di un prodotto si sperimenta, se dividendolo per uno de' suoi fattori si ottiene l' altro per quoziente.

Si mette a prova la divisione sperimentando se il prodotto del quoziente pel divisore coincide col dividendo. Infatti non può essere $^{27}/_{3} = 9$ senza che si abbia identicamente $^{27}/_{3} \times 3 = 9 \times 3$ cioè $27 = 9 \times 3$. Dal rapporto di eguaglianza $^{27}/_{3} = {}^{9}/_{1}$ risulta (7) $3 : 27 :: 1 : 9$, il che significa *che il divisore sta al dividendo come l'unità al quoziente.*

§. 16. I n.ⁱ decimali che si ottengono dividendo un n.° minore per un n.° maggiore, come quando si cercò il valore di $^{46}/_{209}$ (10), hanno talvolta la singolare proprietà di essere *periodici*. Si ha per

es.° $^{12}/_{37} = 0,324324$. Quando, indipendentemente dalla riduzione di un rotto, s' incontra un decimale di questa natura, fa d' uopo trasformarlo in rotto ordinario, e ciò sempre può farsi. Un n.° decimale periodico è eguale ad un rotto, il cui numeratore è il periodo, il denominatore è $= 99\ldots$ tante volte quante sono le cifre del periodo. Infatti $324,324\ldots$ è 1000 volte $> 0,324\ldots$, e tolto questo n.° si ha il residuo 324, 999 volte $> 0,324\ldots\ldots$ Dunque $0,324\ldots = {}^{324}/_{999}$.
Così $0,004141\ldots = {}^{41}/_{9900}$ e $0,324141\ldots = {}^{32}/_{100} + {}^{41}/_{9900} = {}^{32 \times 99 + 41}/_{9900} = {}^{3209}/_{9900}$

§. 17. È proprietà delle proporzioni geometriche *(per quoziente)*(7) che il prodotto de' termini estremi, sia eguale al prodotto de' medj.

Così in $3 : 6 :: 5 : 10$ si ha $3 \times 10 = 6 \times 5$.

Dividendo 3×10 per 5 si ottiene 6; si ha 10 dividendo 5×6 per 3.

Bastano adunque tre termini per trovare il 4.°. In ciò consiste *la regola del tre*. Essa dipende dal seguente principio: *Che gli effetti di cause omogenee e di uniforme attività in tempo eguale stanno come le cause.*

Se i tempi in cui due cause omogenee ed uniformi agiscono sono diversi, la regola del tre diventa *composta*. Per rapporto ad essa si verifica: *Che gli effetti di cause omogenee, uniformemente attive, stanno come il respettivo prodotto delle cause e de' tempi*.

Es.° della reg. *semplice*. Dato che un braccio di panno costi 12.li 10.sol quanto costano 6 braccia, e $^{2}/_{3}$?

La proporzione $1 : 6\,{}^2/_3 :: 12.^{li}\ 10.^{sol.}$ al 4.° termine mostra che il n.° cercato, cioè l'*incognita* del probl., è $= 6\,{}^2/_3 \times 12^{li.}\, 10^{sol.} = {}^{20}/_3 \times 250^{sol.} = \frac{5000}{3}$ $= 1666.^{s.}\,{}^2/_3 = 83.^{li.}\ 6^{s.}\ 8.^{den.}$

Es.° della regola del tre *composta.* Sette uomini in 17 giorni, lavorando sei ore per giorno, hanno fatto un' escavazione di 7776 br. cube: si dimanda qual sarebbe l'escavazione corrispondente al lavoro di 36 uomini, i quali lavorino per 25 giorni e ½ sette ore al giorno.

Il lavoro di 7 uomini che lavorano 6 ore equivale a quello di 6×7 ($= 42$) uomini che lavorano un' ora, e 42 uomini che per 17 giorni lavorano un' ora fanno lo stesso che 42×17 ($= 714$) uomini in un' ora: così il lavoro di 36 uomini che lavorano 7 ore equivale a quello di 7×36 ($= 252$) uomini in un' ora, e però il lavoro di questi in 25 giorni $+ {}^1/_2$ è $252 \times 25\,{}^1/_2$ $= 252 \times {}^{51}/_2 = 126 \times 51 = 6426.$

Dunque $714 : 6426 :: 7776$: al 4.° term. che si trova $= {}^{6426 \times 7776}/_{714} = {}^{3213 \times 7776}/_{357} = {}^{1071 \times 7776}/_{119}$ $= {}^{8328096}/_{119} = 69984^{br.\ c.}$

§. 18. Prob. Un oste ha mescolate insieme tre qualità di vino, cioè 20 barili da $12^{li.}$ il barile, 6 da $10.^{li.}$, 8 da $32.^{li.}$, e vuol vendere il misto col guadagno del 20. per 100. Quanto dee pretendere per ciascun barile? Soluzione.

La totale quantità del vino essendo $= 34$ barili, il prezzo totale $= 556.^{li.}$ ciascun barile del misto vale ${}^{556^{li.}}/_{34} = 16.^{li.}\ 7.^{s.}\,{}^1/_{17}$.

Dunque $100 : 20$ ossia

$5 : 1 :: 327.^{s.}\,{}^1/_{17}$: 4.° ter.$^{ne.}$ $= 3.^{li.}\ 5.^{s.}\ 4.^{den.}\ {}^{69}/_{85}$

è il guadagno che dee fare su ciascun barile, ed

in conseguenza il prezzo richiesto è $= 19.^{\text{lir.}}\ 12.^{\text{s.}}\ 5.^{\text{d.}}$

La regola per cui si ottiene il prezzo del misto (nel caso prec. $= 16.^{\text{li.}}\ 7.^{\text{s.}}\ ^{11}/_{17}$) dicesi *alligazione diretta*.

§. 19. Prob. Un mercante essendosi obbligato di pagare fra un anno la somma di 800 scudi, il creditore di questa somma 8 mesi prima della scadenza passa l' obbligo ad un banchiere per averne l' anticipazione. Posto l' interesse al 6 per 100, si dimanda qnal sia la provvigione dovuta al banchiere per l' interesse degli 800 scudi anticipati. Soluzione. Siccome l' interesse di 100 scudi per 8 mesi è di 4 scudi, dicasi 104 : 100 ossia

$$26 : 25 :: 800 : \text{al } 4.^{\circ} \text{ term.}$$

che si trova $= {}^{20000}/_{26} = {}^{10000}/_{13} = 769.^{\text{sc.}}\ {}^{3}/_{13}$

Questa è la *regola di sconto.*

§. 20 Prob. Un negoziante di Pietroburgo vuol sapere di quanti rubli Russi dee dar credito ad un banchiere di Amsterdam onde questi rimetta in Berlino per suo conto 1000 ducati Prussiani. Il cambio di Pietroburgo con Amsterdam è a $47\ ^{1}/_{2}$; quello di Amsterdam con Berlino a 142: vale a dire che un rublo Russo vale $47\ ^{1}/_{2}$ stuvers d'Olanda, e 100 risdalleri Olandesi corrispondono a 142 risdalleri Prussiani. Si sà d' altronde che il ducato Prussiano vale tre risdalleri di detta moneta e che il risdallero Olandese fa 50 stuvers.

Soluzione. Siccome il richiesto n.° x de' rubli Russi dev' essere tanto maggiore di 1000 ducati Prussiani quanto il predetto rublo è minore del ducato, si ha

duc. Pr. *rub. Rus.* *Rub. Rus.* *duc. Prus.*
1000 : x :: 1 : 1

Rub. Rus. *stuv.*
Ma 1 : 1 :: 47,5 : 1

stuv. *risd. Ol.*
1 : 1 :: 1 : 50

risd. Ol. *duc. Pr.*
1 : 1 :: 142 : 300.

rub. R. *stuv.* *ris. Ol.* *duc. Pr.*
e però 1 $= 47,\ ,5 = \frac{(47.5)}{50} = \left(\frac{47.5}{50} \cdot \frac{142}{300}\right)$

rub. R. *duc. Prus.*
Risulta 1 : 1 : 6745 : 15000.

duc. Pr. *rub. R.*
Dunque 1000 : x :: 6745 : 15000,

duc. R.
cioè $x = {}^{15000000}/_{6745} = 2223 + {}^{22}/_{25}$.

La regola che serve ai probl. di questo genere dicesi *regola congiunta*.

§. 21. La regola di Società è un' immediata applicazione della regola semplice del tre, e serve a spartire il guadagno o la perdita di una società fra i membri di essa, in ragione del respettivo loro capitale di negozio.

Il capitale della società essendo per esempio di 995.$^{sc.}$ ed il guadagno di 366.$^{sc.}$, un socio che abbia contribuita la somma di scudi 225 ha diritto al guadagno espresso dal 4.° termine della proporzione

995 : 366 :: 225 al 4.° term.

che si trova $= 366 \times {}^{225}/_{995} = 366 \times {}^{45}/_{199} = 82^{sc.}\ {}^{152}/_{199}$

sc. *li.* *sol.* *den.*
$= 82.\ 3.\ 14.\ 6.\ {}^{174}/_{199}$. (1)

§. 22. Avendo riconosciuto per esperienza che

(1) Lo scudo è di 7.$^{li.}$ 10.$^{sol.}$; la lira di 20.$^{sol.}$

la teorìa de' numeri, l' estrazione delle radici e la dottrina de' logaritmi desiderano il lume del calcolo algebrico, riserbiamo questi articoli alla seconda parte della scienza del calcolo, dove ne sarà molto più facile e più compiuta la trattazione.

Concludiamo intanto 1.° Che l' Aritmetica è *una scienza la quale insegna ad eseguire con metodo facile e sicuro qualsivoglia computo numerico, dipendente dalle quattro operazioni primarie: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, e dalla proporzione per quoziente*. 2.° Che l' aritmetica è la base di tutte le scienze matematiche, perchè i rapporti di tutte le specie di quantità si riducono finalmente in numeri.

Per vedere quanto l' Aritmetica moderna sia superiore a quella degli Antichi, basta osservare il compendio della greca aritmetica di *Psello* lasciatoci da *Xilandro*; le opere di *Nicomaco* e di *Boezio*, e quella di *Giordano* (del Sec. XII.), opera riprodotta e commentata da *Fabro Stapulense* nel 1480. I sei Libri Aritmetici, che de' tredici antichi Libri di *Diofanto* Alessandrino ci restano, altro non contengono che ingegnosi e talvolta astrusi problemi di analisi aritmetica e geometrica. Le prime tracce di un Aritmetica magistrale e profonda trovansi per nostro avviso nella *Somma* di *Fra Luca* dal Borgo, pubblicata nel 1494, e nel *Trattato generale* di *Nicolò Tartaglia* Bresciano.

APPENDICE

In cui si discutono alcuni Articoli destinati all' erudizione, e sono

I. I sistemi caratteristici *binario* e *duodecimale*. II. L' aritmetica *palpabile di Saunderson.* III. Una regola di compendio per la moltiplicazione de' numeri decimali. IV. L' origine aritmetica dell' infinito e dell' infinitesimo. V. Il Sistema *metrico*

§. 23. Nel sistema binario di *Leibnitz* si fa uso de' caratteri 0,1 e si scrive

1 *per* . . .	1	1001 *per*.	9
10	2	1010	10
11	3	1011	11
100	4	1100	12
101	5	10000.	16
110	6	100000	32
111	7	1000000	64
1000	8	100101001011. . . .	2379

Per un milione si richiedono 20 cifre.

Nel sistema duodecimale, proposto dal Geometra Olandese *Stewin*, le cifre divengono 12 volte maggiori a misura che avanzano di rango verso la sinistra. Il n.° 12, base del sistema, ha il pregio di essere divisibile per 2, 3, 4, 6; mentre il 10 lo è per 2 e 5, ma il soverchio n.° de' caratteri, e la complicatezza del valore di posizione che varia come i numeri

$12,\ 12\times12=144,\quad 12\times12\times12=1728$; ec.

lo rendono affatto inopportuno.

Indicando 10 per α, 11 per β, 12 per 10, si scrive

12 *per* 14	1 β *per* 23
13. 15	20 24
18. 20	30 36
19. 21	40 48
1α. 22	100. 144
	1000. 1728
	ec. . . . . (1)

§. 24. *Saunderson*, cieco sin dall' età di un anno, immaginò l' Aritmetica *palpabile*; indi fece lo stesso per rapporto alla Geometrìa ed all' Algebra, e tali furono i suoi progressi, che giunse a meritarsi la cattedra di Matematica nell' Università di Cambridge. Abbiasi un sufficiente n.° di quadrati di legno, come A B C D (*Fig*. 1.) suddivisi in altri 4; in ogni intersezione siavi un foro per collocarvi una spilla, e si convenga che ciascuna rappresenti la cifra corrispondente 1, 2, ec. 9, notata nella F.ª sudd.ª. Una spilla di grossa testa collocata nel centro indichi lo zero. Con questo meccanismo prontamente si scrive qualunque n.°, purchè si abbiano tanti quadrati quante sono le cifre del medesimo. La *F.ª* 2. dà l' espressione del n.° 47091. Per sommare il n.° 47091 con un altro si dispone sotto la prec. una 2.ª fila di quadrati, esprimente il nuovo n.°, in guisa che i respettivi quadrati delle unità, diecine ec. si corrispondano verticalmente. Si fanno in una simile guisa le altre operazioni.

(1) Vedremo (Teoria de' Numeri) come dall' espressione di un n.° nel sistema decimale si deduce quella dello stesso n.° in un altro sistema dato.

§. 25. Per abbreviare la reciproca moltiplicazione di due n.[i] decimali, si prendano dalla sinistra verso la destra tante cifre del moltiplicatore, quante sono le decimali esatte che si vogliono: queste si scrivano in ordine inverso sotto quelle del moltiplicando, con l'avvertenza di porre i decimi del moltiplicatore sotto i centesimi del moltiplicando, e di troncar questo dove il moltiplicatore finisce. Nel prendere il 2.° prodotto parziale si trascuri la 1.ª cifra del moltiplicando, la 2.ª nel prendere il 3.° ec.: tutti i prodotti parziali si scrivano l'uno sotto l'altro in tal guisa, che le prime cifre di essi formino una colonna, e la somma, sopprimendo le ultime due cifre, ed aumentando di 1 l'ultima delle rimanenti se la 1.ª cifra soppressa sia 9, darà il prodotto richiesto. Volendo con 4 decimali 0,424623 × 0,225344 si scriva e si operi come segue;

0,42462
3522

84924
8492
2120
126

0,0956|62

È inutile il prodotto della 1.ª cifra 3 del moltiplicando per le successive cifre 2, 2, 5, ec. del moltiplicatore, perchè il risultamento respettivo esprime decime milionesime, centesime milionesime ec., n.[i] che non possono influire nelle

quattro cifre richieste. Per una simile ragione si trascura la moltiplicazione della 5.ª cifra 2 del moltiplicando per la 2.ª cifra 2 del moltiplicatore ec.

Se nel prodotto prec. si vogliono 6 decimali esatte si aggiunga uno zero al moltiplicando, e si operi come segue

```
 4246230
  443522
 -------
 8492460
  849246
  212310
   12738
    1696
     168
 -------
0,095686|18
```

Volendo 0,434642 × 0,4223 con 6 decimali esatte si prenda per moltiplicatore il 1.° n.°, al 2.° si aggiungano tre zeri,

```
scrivendo      0,4223000
                  246434
               ---------
e si avrà      0,183549|30
```

Per ottenere con 10 decimali esatte il prodotto
1,06688 62283 30071 × 0, 00000 40701

```
si scrive         1066886
                    10704
                  -------
e si ottiene 0,0000043423|26
```

Si separano due cifre perchè $0,4 \times 25 = 10$.
Se i due fattori hanno zero innanzi e dopo la virgola si aggiungono nel prodotto tanti zeri a sinistra, quanti se ne trovano dopo la virgola sul principio de' due fattori. Così per

formare $0,0538534 \times 0,0538534$

si scrive { 538534
435835

e si ritrae 0,0029001|78

Per $0,0538491 6 \times 0,0004832 9$ si scrive il 9 sotto il 5, si sopprimono le ultime due cifre del moltiplicando, e la solita operazione dà 8 decimali cioè 0,00002602.

Quando ciascuno de' fattori contiene un n.° intiero si trasporta la virgola finchè tutte le cifre divengano decimali, ed il prodotto si moltiplica per 1 seguìto da tanti zeri quante sono le cifre de' n.i intieri.

Per esempio $6,185339 \times 698,324$ si cangia in $0,6185339 \times 0,698324$ ed il prodotto 0,431936 moltiplicato per 10000 diviene 4319,37. Volendo tre decimali esatte si aggiunge uno zero sul fine di ambedue i fattori, ed operando al solito su i n.i

61853390
04238 96

si ottiene 4319,370|56

La giunta di due zeri darebbe 4 decimali. Per es. la moltiplicazione indicata per

$$\begin{array}{r} 6{,}18533900 \\ 0{,}04238896 \\ \hline \end{array}$$

dà $4319{;}3706|\underline{67}$

§. 26. Per concepire l' origine aritmetica dell' infinito e dell' infinitesimo, il cui respettivo simbolo è ∞, $1/\infty$. $(=0)$, basta considerare le respettive serie indefinite.

$1/1$, $1:1/2=2$; $1:1/3=3$; $1:1/4=4$; .... $1:1/1000000=1000000$; ..
$1/1$, $1/2$, $1/3$, $1/4$; .... $1/1000000$.

Il limite della 1.^{a} è $1:1/\infty=\infty$; il limite della 2.^{a} $1/\infty=0$.

§. 27. Il Sistema metrico hà per oggetto di rendere semplici ed uniformi le suddivisioni di tutte le unità di misura necessarie agli usi della società. Esso consiste in una regolare e facile modificazione di un' adattata misura lineare, detta *metro*, eguale alla decima milionesima del quadrante del meridiano. Un sistema, la cui esistenza voleasi eguale a quella della stirpe umana, dovea fondarsi su di una base presa nel seno della natura, ed inalterabile quanto il globo terraqueo. L' Arco del meridiano di 9.°, 67379722 (= 551584,72 tese (1)) compreso fra Dounkerque e Montjoui, misurato con assidua fatica, nello spazio di sette anni e mezzo dai valorosi Astronomi *Lambre* e *Méchain*, servì al calcolo del

(1) La tesa, misura lineare di Francia, è divisa in 6 piedi, il piede in 12 pollici, questi in 12 linee, la linea in 10. punti.

quadrante. Le analoghe operazioni fisico-chimiche, relative alle misure di peso e di capacità furono egregiamente eseguite da *Brisson*, *Coulomb*, *Lefèvre Gineau* e *Darcet*. Era compiuto il memorabile lavoro, quando 22 Matematici furono deputati ad un congresso in Parigi sul declinare del 1799, per esaminarne le basi, discuterne i metodi e verificarne le operazioni. Parve per un istante che l' unanime suffragio dei Deputati (frà quali *Lagrange*,) dovesse stabilmente accreditare il nuovo sistema, ma l'infelice nomenclatura, già disapprovata da *Mascheroni* e da noi, l' avversione de' popoli a qualsivoglia innovazione contraria alle antiche loro abitudini, le tristissime circostanze de' tempi, e soprattutto l' odiosa protezione di un aborrito Governo, ne affrettarono l' abolizione.

Il *metro* è = 3.$^{\text{pi.}}$ 11.$^{\text{lin.}}$, 296 = 3$^{\text{pi.}}$,078444, ed in misura Lucchese

1.$^{\text{br.}}$ 8.$^{\text{on.}}$ 3.$^{\text{pu.}}$ 10.$^{\text{at.}}$, 67 = 1.$^{\text{br.}}$; 693678.

I nomi de' suoi multipli sono

10.$^{\text{met.}}$ *decametro*, 100.$^{\text{met.}}$ *ectometro*;

1000.$^{\text{met.}}$ *chilometro*; 10000.$^{\text{met.}}$ *miriametro* ec.

Viceversa quelli de' summultipli sono

$^{1}/_{10}$$^{\text{met.}}$ ... *decimetro*; $^{1}/_{100}$$^{\text{met.}}$ ... *centimetro*;

$^{1}/_{1000}$$^{\text{met.}}$ ... *millimetro* ec.

Il decimetro cubo dicesi *litro* ed è la misura di capacità: vale 8.$^{\text{on.}}$ 658.$^{\text{pu. c.}}$ 38.$^{\text{at. c.}}$ 70 misura Lucchese.

Un centimetro cubo pieno d' acqua distillata, alla temperatura della sua massima densità ($^{3}/_{10}$ del centigrado), costituisce l' unità di peso e dicesi *grammo*. Esso equivale in peso di Lucca
lib. *on.* *den.* *gr.*
a 0. 0. 0. 20. ,24.

Alla libbra si è sostituito il peso di 1000 gram-
lib.
mi, ossia il *chilogrammo*, che corisponde a 2.
on. *den.* *gr.* *lib.*
11. 3. 16. ,01 ossia 2. ,92940.

Il quadrato del decametro dicesi *aro*, unità
br. q. *onc. q.*
delle misure superficiali, ed è = 286. 123.
pun. q. *at. q.*
7. 17. ,18.

Lo *stero* è un metro cubo e serve alla misura delle legna da cammino.

DD ZIONE

$=\frac{5}{7}$

$=\frac{3\times}{7\times}+\frac{5}{7}$

$=\frac{33-}{7}$

tti si
enom.
rmini
e dell'a

$12.^{lir.}\ 7.^{sol.} \times 6.^{br.}\ 5.^{on.} =$

$(12\times20.^{sol.}+7.^{sol.})\times\frac{6\times12+5}{12}$

$=247.^{sol.} \times \frac{77}{12} = \frac{19019.^{sol.}}{12}$

$=79.^{li.}\ 4.^{sol.}\ 11.^{den.}$

NE

TTR

$=\frac{2}{3\times7}=\frac{2}{21}$;

$\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}=\frac{2\times5}{3\times7}=\frac{10}{21}$

$=\frac{2\times5}{3}=3\frac{1}{3}$

$\frac{92.^{li.}\ 10.^{sol.}}{17.^{br.}\ 5.^{on.}}=\frac{1850.^{sol.}}{\frac{209.^{on.}}{12}}$

$=\frac{22200.^{sol.}}{209}=106^{sol.}+\frac{46}{209}$

$=5.^{li.}\ 6.^{sol.}\ \frac{46}{209}$

$=5.^{li.}\ 6.^{sol.}\ 2.^{den.}\ \frac{134}{209}$

1e 1-2 si

SCIENZA DEL CALCOLO

PARTE II

CALCOLO ALGEBRICO

LIBRO I

TEORICA ELEMENTARE DEL CALCOLO ALGEBRICO.

INTRODUZIONE

§. 28. La verità è sempre d' accordo con se stessa, ed un' ipot. che mediante una serie di rigorose deduzioni conduce ad una conseguenza vera, porta seco la caratteristica della verità; seco porta quella dell' errore se necessariamente conduce ad una conseguenza assurda o impossibile. Questa evidente massima costituisce il fondamento dell'*analisi* matematica, principale oggetto importantissimo della scienza del calcolo.

È proprio del metodo analitico assumere ipoteticamente come certa la verità della proposizione da dimostrarsi, dedurre da questo dato, come da un principio, successive conseguenze, ed inoltrare la deduzione finchè una

se ne incontri, d'altronde certamente vera o falsa, per inferirne respettivamente la verità o la falsità della proposizione primitiva. Il metodo di cui si tratta si attribuisce a *Platone* (Vietae Op. p. 1.), ed ha il pregio di una singolare attitudine al discuoprimento del vero. Per esso si appura se una proposizione incerta sia vera o falsa: per esso altrimenti si dimostra un teorema già noto. Tali appunto erano gli usi dell' analisi *teoretica* presso i Greci. E della stessa indole l' analisi *problematica*, la quale cerca di fare ciò ch' è proposto, ed unicamente si distingue dalla teoretica per la determinazione, in Greco διορισμοσ, di tutte le soluzioni, e delle condizioni da cui queste dipendono. La Geometrìa elementare ne offre parecchi esempj.

Il metodo sintetico procede con ordine inverso. In esso i particolari punti contenuti nella parte ipotetica della proposizione si prendono come principio del ragionamento, e se ne derivano varie conseguenze successive, finchè giungasi alla conclusione stabilita come vera nell' enunciato della proposizione.

Nell' analisi è noto il punto di partenza e la conclusione può essere qualunque purchè certa. Nella sintesi, quand' ella non ricalca le orme analitiche, il punto di partenza è ignoto, unica è la conclusione a cui deesi pervenire: quindi l' estrema difficoltà delle dimostrazioni sintetiche. Esse per altro, ove si tratti di convincere altrui di una verità controversa, sono le più naturali ed insieme le più soddisfacenti,

perchè direttamente guidano l' intelletto per una serie di verità cognite a quella che si tratta di dimostrare (1).

Per destare nel giovanile ingegno nuove scintille di genio analitico, e prepararlo a sviluppare quella preziosa *forza d' invenzione*, (δυναμισ ευρετικη) tanto da' Greci apprezzata, ed a cui una bene intesa istituzione matematica dee tendere costantemente, noi ci proponiamo di risolvere con l' analisi *pura*, altrimenti detta *metodo degli antichi* (Montucla Hist. des Matem. T. I. p. 166. ediz. 2.e) alcuni fra i più difficili ed eleganti probl. geometrici: A tali esempj altri ne succederanno di analisi logica, a questi alcuni esempj semplicissimi di analisi algebrica. Fra gli uni e gli altri otterremo il doppio intento di addestrare l' intelletto alla ricerca delle verità recondite, e di fare in qualche guisa anticipatamente cono-

(1) Non meno di 31 sono le opere comprese sotto il comune titolo di *Luoghi Analitici*, che gli antichi Geometri giudicarono necessari per agevolare l' applicazione dell' analisi matematica. Il libro *De Datis* di *Euclide* è nell' ordine analitico il primo: succedono due libri di Apollonio Pergèo „ *De rationis sectione*, tuttavia esistenti: due del suddetto „ *De spatii sectione*: due *De tactionibus*: tre libri *Porismatum* di *Euclide*: due di *Apollonio*, *De inclinationibus*: due del medesimo „ *De locis planis*: otto libri *Conicorum* del suddetto: cinque di *Aristeo*: *De locis solidis*: due di *Euclide*: *Locorum ad superficiem*: due di Eratostene *De Medietatibus*: Può consultarsi per un più ampio dettaglio il lib. VII. delle Collezioni Matem. di *Pappo* Geometra Alessandrino:

Per compimento dell' attuale articolo, divenuto sempre più interessante a cagione degli equivoci in cui sono caduti *chiarissimi uomini*, e singolarmente *Condillac* (Logica) : *Carnot* (Geom. di Posiz.) ec. osserviamo 1.° che l' analisi fisica essenzialmente differisce dalla matematica, essendo suo scopo decomporre le sostanze composte ne' loro elementi, e cercare per induzione le leggi semplici che influiscono nel fenomeno che si considera. Veggasi la profonda Opera di *Stewart*, (Elements of the Philosophy of the human mind. Edimbourg 1814 in 4). Osserviamo 2° essere destituita di fondamento l' opinione invalsa, che gli antichi abbiano affettato di nascondere l' artifizio analitico de' loro metodi (Montucla Op. cit. T. I. p. 588).

scere l' inestimabile importanza della scienza del calcolo.

29. Probl. Si vuole inscrivere in un dato circolo un trigono tale che un suo lato sia parallelo alla retta che unisce due punti dati di posizione fuori o dentro del circolo suddetto, e ciascuno degli altri due lati passi prolungandolo per uno de' punti dati. Soluzione. Sieno A, B, (*F.*a 3.) i punti, DEG il circolo, C il centro, E il punto richiesto e però FG parallela ad AB. Condotta per A la tangente AD, e per F la tangente respettiva che incontri AB in H, si ha (Geom.a) $G\hat{F}H = F\hat{E}G$ (1), $G\hat{F}H = A\hat{H}F$, ed in forza de' trigoni simili AFH, AEB

è $AB.AH = AE.AF$, ma $AE.AF = \overline{AD}^2$ ed AD è nota, perchè nel trigono rettangolo ACD si conoscono CD ed AC. Dunque $AB.AH = AD^2$, e per determinare il punto E basta prendere AH 3.a proporzionale ad AB, AD,: la tangente tirata pel punto H dà nel contatto il punto F, ed il prolungamento di AF determina il punto E.

Il probl. ammette due soluzioni perchè il punto E può essere anche nell' arco convesso.

Tirata (*F.*a 4.) una tangente per B sia I il contatto, *e* il punto richiesto. Siccome la fg è per ipot. parallela ad AB, la tangente in f, che suppongo incontrare in h la retta AB prolungata se occorre, produce i trigoni simili fhB, eAB, dove oltre $e\hat{B}A$ comune è $h\hat{f}B$ ($= f\hat{g}e$) $= \hat{A}$; quindi

(1) Il segno $\hat{A}$ è simbolo dell' angolo.

Bh : Bf : : Be : AB ; e perchè Bf : BI : : BI : Be risulta Bh . AB = $\overline{BI}^2$ e però Bh è 3.ª proporzionale alle rette AB , BI. Trovato il punto h si conduca per esso la tangente hi , si congiunga il contatto f con B e la Bf incontrerà la circonferenza nel richiesto punto *e*.

I punti dati A , B sieno dentro al circolo (*F.*ª 5.ª); suppongasi E il punto richiesto , ed EA , EB , prolungate incontrino la circonferenza ne' punti H, I. Condotta la tangente in H sia G il punto in cui essa taglia la BA prolungata. I trigoni simili AGH , AEB danno AH . AE = AG . AB ; ma AH . AE = AF. AD , rettangolo cognito per esser data la posizione de' punti A, B. Dunque se sulla FD come diametro si descrive un semicircolo, e si conduce pel punto A l' ordinata rettangola AL, la retta AG che determina i punti E,H è 3.ª proporzionale ad AB , AL. Anche nell' ipot. attuale il probl. ammette due soluzioni.

§. 30. Probl. 2.° Dati tre punti in linea retta esterni ad un dato circolo e nel piano di esso, si vuole inscrivere al circolo un trigono tale, che ciascun suo lato prolungato passi per uno de' punti dati. Soluzione. Sieno (*Fig.*ª 6.ª) A , B, C, i punti , EHI il trigono richiesto : per H si tiri la corda HK parallela alla CBA , per K ed I una corda, che prolungata deve incontrare in un qualunque punto L la CBA ovvero il suo prolungamento ; si tiri finalmente per B la tangente BF. Posto che il punto L cada fra B ed A come nella Fig.ª , risulta C$\hat{L}$K

$= L\hat{K}H = I\hat{E}H$: ma $C\hat{L}K + K\hat{L}A = 200^\circ$; dunque $I\hat{E}A + I\hat{L}A = 200.^\circ$ e però il tetragono AEIL è inscrittibile al circolo: dunque $BL.BA$ $(= BI.BE) = \overline{BF}^2$ e BL è 3.ª proporzionale a BA, BF. Trovato il punto L si cerchi un punto I della circonferenza, tale che tirando per esso e per C, L due seganti, i punti H, K della 2.ª intersezione diano HK parallela a CL ed il punto I sarà quello che soddisfa al probl.

Se i punti C, B, si trasferiscono respettivamente in C′, B′, il punto I passa in I′, il punto L in L′ e si ha $H\hat{E}I' = H\hat{K}L' = I'\hat{L'}A$: per conseguenza se si fa passare una circonferenza circolare per li punti I′, A, L′, bisogna ch'ella passi anche pel punto E. Dunque il tetragono EI′AL′ è inscrittibile al circolo e si ha $B'L'.B'A$ $(= B'E.B'I') = \overline{B'F'}^2$, dove B′F′ è la tangente condotta al circolo dato pel dato punto B′, e per conseguenza cognita.

Fra la posizione C, B, A, e la posizione C′, B′, A′, ve n'è una intermedia, a cui corrisponde un punto i della circonferenza data intermedio ad I, I′, tale che tirando la corda Ki questa passa pel punto A. In questo caso il tetragono si trasforma in un trigono, e siccome l'eq. $BL.BA = \overline{BF}^2$ si cangia in $\overline{BA}^2 = \overline{BF}^2$, la circonferenza che passa per li punti E, i, A tocca in A la retta CBA, ed il probl. si riduce a trovare un punto i della circonferenza data, tale che tirando per esso e per li punti C, A

due seganti, la 2.ª loro intersezione determini una corda parallela alla CA.

In qualunque ipot. vi è un punto dell' arco IK che dà una 2.ª soluzione del probl. e si determina con lo stesso metodo.

§. 31. Probl. 3.° Dati tre punti comunque situati nel piano di un dato circolo, si vuole inscrivere al circolo un trigono tale, che ognuno de' suoi lati passi, prolungandolo, per uno de' punti dati. Soluzione. Sieno A, B, C, i punti dati (F.ª 7.ª), EHI il trigono richiesto, Q il centro del circolo dato HEG. Condotta la corda HK parallela ad AB si tiri la retta KI e si prolunghi finchè incontri AB in L. Questo punto resta determinato pel probl. prec. Infatti

$$H\hat{E}I = H\hat{K}I = I\hat{L}B \;;\; A\hat{L}I + H\hat{E}I = \pi,$$

il tetragono ALIE è inscrittibile e si ha

$$BA.BL = BE.BI = \overline{Bt'}^2$$

dove Bt' è la tangente nel punto t', nota pel probl. prec. Si conduca la corda HG parallela alla CL e si prolunghi GK finchè incontri la CL in D, punto dato, perchè avendosi

$$H\hat{G}K + H\hat{I}K = \pi \text{ ed } H\hat{G}K + L\hat{D}K = \pi$$

i trigoni LIC, LDK sono simili e danno

$$LD.LC = IL.LK = \overline{Lt}^2$$

quadrato della tangente tirata pel punto L, ch' è nota pel probl. cit. Determinati i punti D, L si tiri LM perpendicolare ad AB e QF perpendicolare a GK. Si costruisca sulla retta QD una porzione di circolo capace di $D\hat{L}M$ e

l' intersezione del circolo QKD col circolo dato determinerà un punto K: tirata la KL si ha il punto I e le seganti BIE, CIH, determinano la corda EH, che prolungata passa per A, e costituisce con IE, IH il trigono richiesto. Infatti i trigoni LIC, LDK, essendo in forza dell' eq. LD . LC = IL . LK simili fra di loro (*Geom.*) si ha

$$L\hat{D}K = L\hat{I}C = H\hat{I}K ; H\hat{I}K + H\hat{G}K = \pi$$

e sostituendo per $H\hat{I}K$ l' eguale $L\hat{D}K$,

$L\hat{D}K + H\hat{G}K = \pi$ ed HG parall. ad LC.

Oltre di ciò $D\hat{K}Q = \frac{1}{2}\pi + F\hat{Q}K = \frac{1}{2}\pi + G\hat{H}K$:

Ma $D\hat{K}Q$ = per costruz. a $D\hat{L}M$: dunque $G\hat{H}K =$

$C\hat{L}B$; e perchè HG parallela ad LC, è HK parallela ad AB. Da' trigoni ILB, EAB, simili in virtù di BA . BL = BE . BI deriva $I\hat{E}A = I\hat{L}B$: ma le parallele HK, AB, danno $I\hat{L}B = H\hat{K}I$: dunque $H\hat{K}I = I\hat{E}A$ e però la trasversale AE passa per H, cioè passa per A la corda EH come si dovea dimostrare (1).

(1) Questo probl., siccome deluse la sagacità degli antichi (Pappo Collect: Math. lib. 7. Probl. 8.°, 9.° e 10.°) e lungamente ha resistito agli sforzi de' moderni geometri, sarà sempre celebre nella storia delle matematiche; *Castillon*, che ad insinuazione di *Cramer* ostinatamente se ne occupò, ne diede una difficilissima soluzione geometrica (Acad. de Berl, 1776.); nè più felicemente vi riuscì il genio analitico di *Lagrange* (Luo. cit.) la cui formola finale, giudicata da *Leonardo Euler* inaccessibile alla costruzione, fu a stento costruita da *Lexell* (Nuo. Comm. dell' Acc. di Pietrob. T. IV.). La prima soluzione elegante, sullo stile degli antichi geometri, fu proposta da *Fuss. Giordano da Ottaiano* e *Gio: Francesco Malfatti* aggiunsero nuovi gradi di perfezione all' ardua indagine, risolvendola nell' ipot. che il n.° de' punti dati sia qualunque, Quella da noi addotta e le altre che seguono, sono fondate su i prin-

* §. 32. Probl. 4.° Inscrivere in un dato circolo un tetragono tale, che i suoi lati prolungati passino ciascuno per un punto dato. Soluz. Sieno A, B, C, D, i punti (*F.*ª 8.), MNPQ il tetragono. Si prolunghino le rette AB, CD, finchè s'incontrino in X, si conduca MI parallela ad AB, MG parallela a CD, e si prolunghino le corde IP, GP, finchè taglino in H, K le respettive rette AB, CD. In questa guisa i punti H, K restano determinati (Probl. 2.° e 3.°) Ma $K\hat{P}H$ ($= I\hat{P}G = G\hat{M}I = \hat{X}$) è noto. Dunque (1) può determinarsi il punto P, il che basta per inscrivere il tetragono richiesto.

* §. 33. Probl. 5.° Inscrivere come sopra un pentagono i cui lati passino ciascuno per un punto dato. Soluz. Sieno A, B, C, D, E (*F.*ª 10) i punti dati, MIOGF il pentagono richiesto. Uniti i punti A, B, si tiri la corda MN parallela ad AB, e per N, O la corda NO che tagli AB in P. Abbiamo

cipj adottati dagli anzidetti geometri Italiani, ma presentano un più rapido sviluppamento.

La soluzione algebrica del generale probl. di cui sopra, immaginata da *Carnot* (Geom. de Position p. 383) e molto più la soluzione del probl. generalissimo: *Inscrivere in una data curva un poligono, ciascun lato del quale passi per un punto dato nel piano della curva*, soluzione ottenuta dall'insigne Geometra *Magistrini* nella sua profonda Poligonometria (della quale daremo un ampio saggio nel Tomo V.) hanno assai bene sostenuto il combattuto onore dell'analisi calcolatrice:

(1) La determinazione del punto P si riduce alla soluz. del seg. probl. semplicissimo: Dato un circolo M N (*Fig.* 9) e due punti H, K, determinare nella circonferenza un punto P tale che risulti HPK $= a$; probl. che si scioglie con descrivere sulla H K una porzione di circolo capace dell' angolo a; poichè se il circolo così descritto sega il dato in O e P, l'uno e l'altro punto dà la soluzione richiesta; se il circolo suddetto tócca il circolo dato, il contatto costituisce l'unica soluzione del probl.

$A\hat{I}B + M\hat{I}B = 200.^{\circ}$, e per essere inscritto il tetragono MNOI, si ha

$M\hat{N}P + MIB = 200.^{\circ}$: quindi $A\hat{I}B = M\hat{N}P$, ma $M\hat{N}P = N\hat{P}B$ attese le parallele MN, AB: dunque $A\hat{I}B = O\hat{P}B$; perciò i trigoni BOP, BIA sono simili e si ha BO : BP : : BA : BI, cioè $BI.BO = BA.BP$: ma $BI.BO = t^2$, dove t è la tang. tirata al circolo dal punto B. Dunque il punto P è noto. Si congiunga P con C, per N si tiri la corda NL parallela a PC, e si conduca la corda LG, che si prolungherà finchè incontri la PC in Q. Per la ragione addotta relativamente ai punti L, D, nel probl. 3.° risulta $CP.CQ = t'^2$, dove t' è la tang. tirata al circolo per C: così Q resta determinato. Si tiri per L la corda LT parallela alla DQ, e da T per F la TF che incontri la DQ in R. Qui pure si ha $QD.DR = t''^2$, dove t'' è la tang. condotta per D, ed il punto R rimane determinato. Si conduca la RE e la corda TM. Nel tetragono inscritto LTMN si ha

$L\hat{T}M + M\hat{N}L = 200.^{\circ}$; ma è noto $M\hat{N}L = B\hat{P}C$: dunque si conosce $L\hat{T}M$. Siccome RD è parallela ad LT, se si adatta la RS in modo che sia $D\hat{R}S = L\hat{T}M$, risultano RS, TM parallele ed il probl. è sciolto mediante il probl. 1.° perchè sono dati i punti R, E, e si dee trovare nella circonferenza del circolo un punto F tale, che tirando le seganti EFM, RFT, risulti TM parallela alla data RS.

Il met. esposto vale per qualunque n.° di punti dati: se il n.° di questi è dispari la soluzione dipende dal probl. 1.°, se pari dal probl. di cui nella nota al probl. 4.° Il metodo stesso non esige che una facile modificazione qualora alcuni o tutti i punti assegnati sieno dentro al circolo dato.

CAPITOLO I.

Primi principj del Calcolo Algebrico.

§. 34. L'Algebra, in Arabo *algebra-macabelah*, dalle voci *algiabarat* (ricomposizione di rotti), *macabelah* (opposizione e comparazione) è *in certa guisa* un'Aritmetica universale (1) ed ha per oggetto il calcolo delle quantità indeterminate. Nel senso il più esteso ella insegna altresì a risolvere i problemi proponibili sulle quantità, ed a ciò soddisfa assegnando il sistema delle operazioni da farsi sulle quantità date, per dedurne il valore di quelle che costituiscono la soluzione (2). Tal è

(1) *Lagrange De la Resolut. des Equat. numer.* p. VI.

(2) I più distinti Algebristi Arabi furono *Mohamed* ed *Omar Ben Ibrain*: il primo si crede autore di un ritrovato importante che indicheremo a suo luogo: il secondo ha lasciata memoria del suo valore in un manoscritto esistente nella biblioteca di Leyden (Andres Stor. della Letterat. Univ.)

Leonardo Bonacci Pisano recò dall'Arabia in Italia sul principio del secolo XIII. l'algebra numerica, ignota allora e per molto tempo in seguito a tutte le nazioni dell'Europa.

La memorabile trasformazione dell'algebra numerica in letterale o *speciosa* si attribuisce a *Maurolico*, geometra Messinese, che morì di 81 anno nel 1575 (*Cossali - Orig., trasporto in Ital. ec. dell'Alg.*: *Corniani*, - *I secoli della Letteratura Italiana* T. 8.°)

appunto ciò che da noi s' intende per calcolo Algebrico.

Fra gl' innumerabili probl. che possono proporsi sulle quantità numeriche e sulle indeterminate, alcuni si sciolgono col semplice raziocinio, altri desiderano il sussidio di opportuni segni per cui si agevoli la combinazione delle idee; altri finalmente richiedono teorie e regole adattate all' indole de' probl. stessi. Per dare un saggio de' probl. spettanti alla 1ª classe sia:

Probl. 1.° Uno zio ha 40 anni, ne ha 6 il suo nepote. Quando l' età del primo sarà quadrupla di quella del secondo? Soluzione. Se si conoscesse il tempo che dee passare se ne verificherebbe l'esattezza dicendo: $40.^{an.}$ più il tempo ignoto equivale a 4×6 più il quadruplo del tempo ignoto. Ma il rapporto di due cose uguali non si altera togliendo un' egual parte da entrambe, e tolto nel caso attuale il n.° 24 più il tempo ignoto, resta 16 eguale al triplo del tempo ignoto: dunque il tempo predetto è uguale a $5.^{an.}$ più $^1/_3$. Infatti $40.^{an.} + 5.^{an.}\, ^1/_3 = 4 \times 6.^{an.} + 4 \times 5.^{an.}\, ^1/_3 = 4 \times 11.^{an.}\, ^1/_3$.

Probl. 2.° Un padre ha 60 anni più di suo figlio e l'età di ambedue forma 130 anni. Qual è l' età di ciascuno? Soluzione. Siccome l' età del padre equivale a quella del figlio aumentata di 60 anni, dicasi: l' età del figlio più $60.^{an.}$, più l' età del figlio, cioè la doppia

Gli antichi fecero scarsi progressi nelle scienze dipendenti dal calcolo, perchè non possedevano un adattato sistema di numerazione ed ignoravano il calcolo algebrico. Chi desidera una luminosa prova di questa 2.ª proposizione osservi le soluzioni addotte da *Diofanto* nel Lib. I. delle *Questioni Aritmetiche*.

età del figlio più 60.$^{an.}$ fa 130.$^{an.}$. Dunque la doppia età suddetta fa 130 meno 60 cioè 70$^{an.}$, l'età semplice è di anni 35; quella del padre di 35 più 60 ossia di 95.$^{an.}$

§. 35. Se *l'incognita* del probl. (tal era l'età del figlio nel probl. prec.) si debba moltiplicare una o più volte per se stessa; se le condizioni del probl. sieno più d'una ed esigano la moltiplicazione delle incognite fra di loro, ovvero sieno alquanto astruse e complicate, il solo raziocinio difficilmente o in nessun modo può soddisfare alle combinazioni che si richiedono per giungere alla soluzione: perciò si sono immaginati segni, simboli e nomi, tutti per ordinario molto semplici, sovente espressivi e caratteristici, per cui vien diretto ed avvalorato lo sviluppamento delle forze intellettuali; e si sono investigati opportuni metodi, che fanno dipendere la determinazione delle incognite da un certo n.° di regole generali. Così la massima parte della difficoltà si riduce a trovare una conveniente espressione delle condizioni che costituiscono il probl.

Essendo a, b, x, y, n.^{i} qualunque si scrive ab per $a \times b$; $a:b$ per $\frac{a}{b}$; $(a+b)\,x$ equivale ad $a\,x + b\,x$, ed $(a+b)\,(x+y)$ ad $(a+b)\,x + (a+b)\,y =$ ad $a\,x + b\,x + ay + by$.

Due quantità separate da uno de' segni $<$, $>$ formano una *ineguaglianza*: tal è $a+b<x$.

Il rapporto di eguaglianza, indicato col segno $=$, fra due quantità diversamente espresse, come $a\,x+b=c$, dicesi *equazione*. Essa degenera in *identità* se l'espressione dell'una e

dell' altra quantità sia la stessa, come $a x + b = a x + b$.

Tutto ciò che in un eq. trovasi alla sinistra del segno $=$ ne costituisce il 1.° membro.

Ogni quantità distinta dalle altre col segno $+$ o $-$ dicesi *termine* o *monomio*, che è *positivo* se vien preceduto dal 1.° segno, *negativo* se dal 2.° *Binomio* indica due termini come $a - b$, $ab + cd$: *trinomio* tre, *polinomio* più termini connessi con uno de' suddetti segni $+$, $-$.

Si dà il nome di *funzione* ad un polinomio quando si considera per rapporto ad una o più quantità in esso comprese. Così $x^2 + a x + b$ può riguardarsi come una funzione d' x. *Funzione di una quantità è dunque un' espressione letterale che la contiene in qualunque siasi modo.*

§. 36. Coerentemente allo stile adottato dagli algebristi di rappresentare le incognite d'ogni probl. con le ultime lettere dell' alfabeto, le quantità cognite con le prime, se diciamo x l'età del figlio (Probl. 2.°) è $x + 60$ quella del padre ed $x + 60 + x = 130$, cioè $2x + 60 = 130$ è l'eq. del probl. Sottraendo 60 dall' uno e dall' altro membro si ha $2x = 70$, e dividendo per 2, $x = 35$ come si sapeva. Questo valore d' x, perchè verifica l' eq. e perciò risolve il probl., vien da noi chiamato *Risolvente* dell'eq. e del probl. *Risolvere* un' eq. vuol dire *assegnare i valori dell' incognita che la verificano, riducendo i suoi membri all' identità*. Così $x = 35$ cangia l'eq. $2x + 60 = 130$ in $70 + 60 = 130$, ossia in $130 = 130$.

Se si fosse avuta l'eq. $2x - 60 = 130$ si sarebbe aggiunto 60 a ciascun membro e si sarebbe avuto $2x = 190$, $x = {}^{190}/_2 = 95$. Tale appunto sarebbe stata l'eq. del probl. se si fosse indicata per x l'età del padre.

Dunque *un termine si può trasferire da un membro nell'altro purchè gli si dia il segno contrario*, cioè + s'era preceduto dal segno — e viceversa. Ciò serve a liberare l'incognita x dalle quantità che la modificano per addizione o per sottrazione. *Si può* dunque *mutare il segno di tutti i termini di un'eq.*

Lo stesso può praticarsi nelle ineguaglianze ma convien mutare il segno $<$ in $>$ e viceversa. Se $m > a - b$ si ha $-m < b - a$. Ciò si verifica aggiungendo $-m + b - a$ ad ambi i membri.

§ 37. Per liberare l'incognita di un'eq. dai moltiplicatori e dai divisori si fa uso parimente dell'operazione contraria: Per es.° ${}^3/_4\, x + 5 = 40$ si cangia in ${}^3/_4\, x = 40 - 5 = 35$; poscia in $3x = 4 \times 35$, e finalmente se ne deduce $x = \frac{4 \times 35}{3}$.

Non si altera un'eq. se si modifica egualmente l'uno e l'altro membro con una stessa operazione qualunque ella sia.

Due eq.[i] $M = N$, $P = Q$, dove M, N, P, Q sono polinomj qualunque, danno altresì

$$M \pm P = N \pm Q,\ MP = NQ,\ \frac{M}{P} = \frac{N}{Q}.$$

Le ineguaglianze *analoghe*, come $m < a$, $n < b$ o viceversa, soggiacciono ad un'eccezione

ed è, che non possono generalmente sottrarsi e dividersi fra loro.

Si ha $m + n < a + b$, $mn < ab$; non $m - n < a - b$, $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$.

Per es.° dai rapporti $7 < 8$, $2 < 5$ non può dedursi $7 - 2 < 8 - 5$ nè $7/2 < 8/5$. (1)

Anzi, se la moltiplicazione comprende la sottrazione, come allorchè da $m > a - b$, $n > c - d$ si vuol dedurre $mn > (a-b)(c-d)$, il risultamento può esser falso se non sia $a > b$ e $c > d$. Ne daremo quanto prima un esempio.

§ 38. Tornando a considerare il probl. 2.° si vede che variando i n.i dati 60 e 130, viensi a variare il valore dell'una e dell'altra età, ma non il metodo della soluzione; che in conseguenza si possono comprendere in un solo probl. tutti i casi particolari, altro non richiedendosi che sostituire a 60 una indeterminata differenza d, ed a 130 una indeterminata somma s. Così l'eq. $2x + 60 = 130$ si cangia in $2x + d = s$ e dà $x = \frac{s-d}{2}$: quindi l'età del padre è $x + d = \frac{s-d}{2} + d$ cioè $x + d = \frac{s+d}{2}$.

La soluzione compresa nel sistema delle due formole $\left\{ x = \frac{s-d}{2},\ x + d = \frac{s+d}{2} \right\}$ (a)

è generale, e somministra la regola per risolvere tutti i probl. della medesima specie:

(1) Sopprimiamo la dimostrazione generale perchè alquanto astrusa ed inutile. Basta un caso particolare ove si tratta di dare eccezione ad una proposizione generale.

Reg.^{la} *Il maggiore di due n.^{i} la cui somma e la cui differenza sia data, è = alla semisomma più la semidifferenza; il minore alla semisomma meno la semidifferenza.*

Il probl. 1.° può trattarsi nella stessa guisa. Detta e l'età dello zio, $e_{,}$ l'età del nepote, m il multiplo assegnato, si ha

$$e + x = m(e_{,} + x) = me_{,} + mx,$$

eq. che togliendo x ed $me_{,}$ dall'una e dall'altra parte si cangia in

$$e - me_{,} = (m-1)x \text{ e dà } x = \frac{e - me_{,}}{m-1} \ldots\text{(b)}$$

Questa formola dimostra impossibile il probl. quando $e < me_{,}$.

Le soluzioni comprese nelle formole (a), (b) ci palesano la caratteristica del calcolo algebrico ed è: *Che in vece de' valori individuali delle incognite, esso presenta il sistema delle operazioni necessarie per ottenerli in ogni caso particolare;* sistema che costituisce ciò che gli algebristi chiamano *formola*, e che sempre include, purchè sia semplice, la regola per risolvere tutti i probl. della medesima specie.

Per viemeglio rischiarare l'importante conclusione del §. prec., e per prepararci a discutere la moltiplice nozione delle quantità negative, ci giova risolvere i due seg.

Probl. 3.° Durante il terremoto della Giammaica perì la metà delle case alla 1.ª scossa; cadde alla 2.ª la terza parte delle rimanenti, e 1200 furon salve. Si cerca quante erano le case prima del terremoto. Soluz.^{ne} Se si cono-

scesse il n.° richiesto si verificherebbero le condizioni assegnate, sperimentando se il n.° di cui si tratta equivalga alla somma di 1200 più la metà del n.° anzidetto, più il terzo della sua metà. Sia dunque x il n.° cercato. Dovrà essere

$$x = 1200 + x/2 + 1/3 \,.\, x/2,$$

e moltiplicando tutti i termini per 2×3 onde togliere le frazioni,

$$6x = 7200 + 3x + x.$$

Ma $3x + x = 4x$, e sopprimendo $4x$ nell'uno e nell'altro membro, resta $2x = 7200$: dunque $x = 7200/2 = 3600$ (1).

Lasciati da parte i casi particolari dicasi a il n.° delle case superstiti, ed x/b, x/c, il respettivo n.° di quelle che si suppongono cadute alla 1.ª ed alla 2.ª scossa, e si avrà l'eq.

$$x = a + x/b + x/c,$$

che moltiplicata per bc si cangia in

$$bcx = abc + cx + bx:$$

quindi $bcx - (b+c)x = abc$ ossia

$$(bc - b - c)x = abc,$$

e finalmente $x = \frac{a \times bc}{bc - b - c}$ .... (c)

Avvertasi che bc è il minimo moltiplice de'

(1) Parecchi probl. analoghi trovansi fra gli epigrammi greci che il *Salmasio* trasse da un accreditato codice Palatino. Noi ne riporteremo uno in originale nel libro IV. del Calc. Algebr.

denominatori dati e si vedrà che la formola prec. dà una regola molto comoda per risolvere tutti i probl. analoghi.

Facendo $a=1200, b=2, c=6$ si trova

$$x=\frac{1200\times2\times6}{2\times6-2-6}=\frac{14400}{4}=3600.$$

Per liberare l'incognita dai divisori *basta dunque moltiplicare tutti i suoi termini pel prodotto de' divisori*, e più semplicemente, *pel più piccolo multiplo d'essi.*

§. 40. Probl. 4.° Due corrieri partono, uno dal punto A, l'altro dal punto B (*F.*ª 11.) con le respettive velocità a, b, tali cioè che il 1.° faccia a miglia l'ora, il 2.° b miglia. Posto che la distanza AB sia $=c$, si dimanda il punto C in cui si debbono incontrare. Soluz. Suppongo che i corrieri procedano nella direzione ABC, indico per x il n.° delle miglia che misura la BC, e siccome gli spazi percorsi da due mobili nello stesso tempo con moto uniforme, stanno tra loro come le velocità de' mobili respettivi, si ha

$$\frac{x}{x+c}=\frac{b}{a} \text{ cioè (§. prec.) } ax=b(x+c).$$

quindi $ax-bx=bc$ ed $x=\frac{bc}{a-b}$ ... (d).

Se per es.° il 1.° corriere A fa 8 miglia l'ora, il 2.° 6, ed AB = 20 si trova $x=\frac{6\times20}{8-6}={}^{120}/_{2}=60.$

La formola (d) soddisfa a tutti i casi ma

in alcuni è necessario interpetrarne a dovere il significato.

1.° Se $a=b$ è $x=\frac{bc}{0}=\infty$ ed il probl. non è solubile. Infatti due mobili che partono da un diverso luogo e vanno nella stessa direzione con eguale velocità non possono trovarsi insieme.

2.° Se $a=b$ e $c=0$ risulta $x=0/0$. Ciò significa che i punti d'incontro sono infiniti, cioè che i mobili non si separano giammai. L'espressione $0/0$, qualora l'evanescenza non derivi da un fattore comune come in $\frac{a(a-b)}{b(a^2-b^2)}$ che diviene $=0/0$ quando $a=b$, e tolto il fattore $a-b$ si riduce ad $\frac{a}{b(a+b)}$, è il simbolo di una quantità *indeterminata*.

3.° Se $a<b$ il valore d'x è negativo, e siccome indica un'impossile sottrazione da zero dimostra assurdo il probl. Infatti un mobile non può raggiungerne un altro che lo precede con maggiore velocità. L'incongruenza potendo essere tanto nell'ipot. da cui siamo partiti per verificare le condizioni del probl., quanto nelle condizioni stesse, bisogna procedere se occorre, alla successiva rettificazione dell'una e delle altre. Nel caso attuale basta rettificare l'ipot. con supporre che i corrieri vadano nella direzione opposta C', e che in conseguenza il valore d'x si riferisca alla BC'. Così ottiensi

$$\frac{x}{x-c} = b/a \text{ cioè } x = \frac{b\,c}{b-a}. \text{ (1)}$$

4.° Se $a-b>o$ e $c=o$ si ha $x=o$, e ciò dimostra che il punto d'incontro coincide con quello di partenza.

Supponendo che i corrieri camminino sulla stessa linea, l'uno incontro all'altro, C l'incontro e $BC=x$ (*F.*ª 12.), si ha $\frac{x}{c-x}=b/a$;

Quindi $bx=bc-ax$ ed $x=\frac{b\,c}{a+b}$ ...(e)

(1) Il prof. *Français*, seguito da *Francoeur* e lodato da *Lacroix*, propone in vece una sostanziale variazione dell' enunciazione; immagina che i corrieri siensi mossi *da un tempo indefinito* nella direzione C'C, con le respettive velocità a, b; che A, B, la cui distanza è c, sieno *punti d' arrivo*, e cerca il punto C' in cui debbono essersi precedentemente incontrati. Detta x la BC' risulta

$$\frac{x}{x-c}=b/a \text{ cioè } x = \frac{b\,c}{b-a} = -\frac{b\,c}{a-b}, \text{ valore che sol}$$

differisce nel segno da quello della formola (d).

Noi osserviamo 1.° che malgrado l'addotta variazione il prof. Magonzese è costretto a convenire che il segno inerente alla formola (d) quando $a<b$, indica doversi prendere la BC nella direzione contraria BC', e ricade nella rettificazione dell' ipot.

2.° Che l' idea del tempo indefinito è superflua, perchè basta supporre partiti i corrieri B, A dalle respettive distanze

$$\frac{b\,c}{b-a},\ \frac{b\,c}{b-a}-c\ \left(=\frac{a\,c}{b-a}\right)$$

anteriori a C'. Difatto, indicando i punti di partenza per A', B', e facendo $B'C'=x$, $B'A'=c$ si ha $\frac{x-c}{x}=a/b$, quindi $x=\frac{b\,c}{b-a}$

ed $A'C'=\frac{b\,c}{b-a}-c=\frac{a\,c}{b-a}$,

3.° Che mai non deesi cangiare l' enunciazione del probl. quando per correggere l'assurdità del risultamento basta una semplice variazione dell' ipot.

Per aver subito questa formola bastava mutare il segno di *b* nella formola (d), il che equivale a cangiare nell'opposta la direzione del corriere B.

§. 41. La maniera con cui si è ottenuta la soluzione de' probl. prec. non essendo esclusivamente propria di essi, ma potendosi adottare per qualunque altro, ci suggerisce la seg.

Reg.la Gen.le *Assunto un simbolo indeterminato* x *per esprimere l'incognita del probl., si facciano su di esso tutte le operazioni che si farebbero sul n.° cercato se si conoscesse, per verificarne l'esattezza. L'espressione che ne risulta è l'eq. del probl., ed altro non resta che dedurne il definitivo valore d'*x (1).

Le formole generali, analoghe alle (a), (b), (c), (d), (e) di cui sopra, hanno l'inestimabil pregio di condurre in ogni caso particolare all'immediata soluzione del respettivo probl., tanto l'algebrista meglio istruito quanto il più mediocre aritmetico: evvi però questa differenza fra l'uno e l'altro, che il 2.° vi giunge in forza di una cieca pratica, mentre il 1.°, padrone del metodo che le ha prodotte, opera per principj. Oltre di ciò *le questioni possono esigere diverse formole, ed il solo algebrista possiede il segreto per rintracciarle.* (2)

(1) Vedremo a suo luogo che per questo si hanno sicuri metodi generali, qualunque sia il grado dell' eq. finale.

(2) Così l'illustre *Francoeur*. Gli elementi Matematici di questo Prof. meritano molta lode, e più ancora quelli di Meccanica, ediz. 4.a Parigi 1804... La eleganza ed il gusto analitico ne sono le doti caratteristiche, ed è sovente così felice nello spiegamento delle idee che invano si tenterebbe di emularlo.

Noi potremmo proporci un grandissimo n.° di probl. solubili come i prec., ma l'introduzione delle quantità indeterminate in vece de' n.[i] ci rende avvertiti, che prima d'impegnarci nell'analisi algebrica propriamente detta, *nell'arte* cioè *di risolvere i problemi per mezzo dell'eq.[i]*, ci è d'uopo conoscere le regole ond'eseguire sulle quantità letterali le operazioni dell'Aritmetica.

Una superficiale riflessione sulla diversa indole de' varj quesiti che possono proporsi, ci suggerisce altresì che l'analisi algebrica richiede l'anticipato sviluppamento di parecchie dottrine, il cui sussidio è necessario per esprimere le condizioni che caratterizzano i quesiti stessi, ovvero per risolvere con sicuro e adequato metodo l'eq.[i] che se ne traggono. Un probl. per es.° la cui incognita abbia immediato rapporto con una serie di quantità succedentisi con una data legge; una questione fra'cui elementi siavi un angolo formato da due rette date o da due dati piani; tal altro che dipenda dalle proprietà di una linea o di una superficie curva, ec. è affatto inaccessibile al raziocinio ed al semplice algoritmo algebrico. Tali pur sono i probl. le cui condizioni non possono esprimersi con un'eq. della forma $ax+b=o$, che dicesi eq. di 1.° grado. Se per es.° l'eq. da risolversi sia $axx+bx+c=o$, che è la formola generale dell'eq.[i] di 2.° grado, o anche $xx=m$, tutti gli artifizj adoperati per l'eq.[i] di 1.° grado riescono insufficienti. Per procedere con ordine è dunque necessario che ci occu-

piamo primieramente dell' algoritmo letterale, poscia delle dottrine ausiliarie dell' analisi algebrica.

I piccioli passi fatti sin qui, e quelli che riserbiamo al Cap. seg. hanno il doppio scopo, e di anticipare una facile nozione di alcuni principj algebrici indispensabili per l' intelligenza delle dottrine ausiliarie sopra indicate, e di piacevolmente eccitare la curiosità de' giovani studiosi. Senza spargere di qualche fiore le spine che ingombrano il primo ingresso della Scienza calcolatrice, è vano sperare uno sforzo dalla giovanile incostanza.

CAPITOLO II.

Calcolo delle quantità letterali intiere.

ADDIZIONE.

§. 42. La somma di più quantità eguali si compendia con la moltiplicazione come si fa nell' Aritmetica per rapporto ai n.[i] . Per es.° il simbolo $3a$ equivale ad $a + a + a$ come il prodotto 3×4 equivale a $4 + 4 + 4$. Si ha pure $aab + 2aab = 3aab$.

Due o più polinomi si aggiungono scrivendoli di seguito coi segni che hanno: basta solo avvertire che il 1.° termine di un polinomio, e lo stesso vale per un monomio, s' intende preceduto dal segno $+$ se non trovasi affetto dal segno $-$. Così la somma de' due binomj

$aa + 5ab$, $3aa - 5ac$,
è $aa + 5ab + 3aa - 5ac$ ossia $4aa + 5a(b - c)$.

SOTTRAZIONE.

§. 43. Siccome due quantità conservano la stessa differenza fra loro, quantunque l'una e l'altra egualmente si accresca o si diminuisca, se trattasi di sottrarre $b - c$ da a si può aggiungere c ad ambedue le quantità $b - c$, a, per togliere poi $b - c + c$ ossia b da $a + c$: ma la sottrazione di cui si tratta s'indica scrivendo $a + c - b$: dunque per indicare coi segni algebrici la differenza $a - (b - c)$ si cangia il segno $+$ di b in $-$, il segno $-$ di c in $+$ e si sommano con a le quantità $-b$, $+c$. La regola non soffre eccezione qualora b e c si dividano in qualsivoglia n.° di parti, e però la sottrazione di un polinomio si effettua mutando il segno de' suoi termini e facendone poi la somma.

Il significato di una quantità negativa può essere moltiplice.

1.° Spesso ella indica assurdità nelle condizioni o nell'ipotesi, o in entrambe. Evvi assurdità d'ipot. nel Probl. del §. 40. n.° 3.° ed il valore d'x esprime una retta, situata in direzione contraria a quella che si era adottata per verificare le condizioni. L'assurdità esiste nelle condizioni (Probl. cit. n.° 1.° e 4.°)

2.° È talvolta l'espressione di un debito.

3.° In alcuni casi è insignificante.

4.° In alcuni altri dà la soluzione di un probl.

correlativo, e si riferisce ad un' ipot. implicitamente compresa nell' analitica espressione delle condizioni assegnate. Schiariremo questa verità quando ci occorra di profittarne.

In vece di *a negativa*, per compendio si scrive $a < o$. *Impossibile est* (così *Wallis* Oper. Math. T. 2. p. 286.) *ut ulla magnitudo sit minus quam nihil, nec tamen est ea suppositio aut inutilis aut absurda, modo recte intelligatur.*

MOLTIPLICAZIONE.

§. 44. È un principio fondamentale della moltiplicazione tanto Aritmetica quanto Algebrica il seg.

Teor. Il prodotto di più fattori è lo stesso qualunque sia l' ordine col quale i fattori si combinano insieme. Dim.ne I fattori sieno a, b e perchè si prescinde dall' ipot. $a = b$ in cui la verità del teor. è manifesta, pongasi $a > b$ ed $= b + c$. Siccome

$$ab = (b + c)b = bb + cb, \; ba = b(b + c) = bb + bc$$

risulta $ab = ba$ se $cb = bc$ dove $c < a$. Se $b > c$ si ponga $b = c + d$ e si avrà

$$cb = c(c + d) = cc + cd; \; bc = (c + d)c = cc + dc$$

cioè $cb = bc$ se $cd = dc$ dove $d < b$.

Qualora fosse $c > b$ si farebbe $c = b + d$ e si ritrarrebbe

$$cb = (b + d)b = bb + db, bc = b(b + d) = bb + bd$$

ossia $cb = bc$ se $db = bd$ dove $d < c$.

Proseguendo si forma una serie di n.[i] .

$(a, b, c, d, e, f \ldots\ldots t, u,) \ldots$ I

tutti *intieri positivi*, perchè ciascuno risulta dalla *sottrazione* di un n.° intiero da un intiero maggiore; *decrescenti* (quantunque non sempre con l'ordine espresso dalla serie I.) perchè dedotti mediante una successiva sottrazione; e tali che $u = 1$ ovvero $= 0$. Infatti se $u > 1$, sottraendolo quante volte si può dal n.° prossimo maggiore si ottiene un residuo positivo $< u$, il che contraddice all' ipot. che il n.° u sia l' ultimo. Ma il risultato $u = 0$ suppone i due n.[i] prossimi antecedenti s, t, eguali fra loro, giacchè $u = s \backsim t$ (diff.[a] posit.). Dunque l' operazione sopra esposta necessariamente conduce ad un prodotto tu dove $u = 1$, ovvero ad un prodotto st dove $t = s$. Nel 2.° caso l'identità di st con ts è manifesta: nel 1.° è tale parimente, perchè $t \times 1$ non può differire da $1 \times t$. Dunque $ab = ba$.

Il prodotto abc è necessariamente = ad uno de' seg.[ti]: $ab.c$; $bc.a$; $ac.b$; ma facendo $ab = p$, $bc = q$, $ac = r$ risulta $p : q :: a : c$ cioè $qa = pc$ ossia $bc.a = ab.c$. Così $q : r :: b : a$ cioè $q.a = rb$ ossia $bc.a = ac.b$. Dunque ec.

Questa semplicissima dimostazione è di *Gasparo Bachet* illustre Commentatore di *Diofanto* (In Diophantum Porismatum Lib. I. prop. III.)

Coi prec. principj facilmente si dimostra l' identità del prodotto di un n.° m di fattori, che sieno con qualunque ordine fra loro moltiplicati. Per provare per es.° che $abcd$ è $= cadb$

sostituiscasi nel 1.° membro *acb* per *abc*; nel prodotto *acbd* si consideri *ac* come un solo n.°; si cangi *bd* in *db* e si avrà $acdb = cadb$, eq. identica, perchè sopprimendo *b* resta $acd = cad$. eq. di cui si è superiormente provata l'identità.

§. 45. L'ordine con cui si combinano i fattori di un prodotto potendo esser qualunque, se trattasi di moltiplicare l'uno per l'altro due monomj dati come $2ab$, $3ac$, si scrive $2 \times 3aabc$, e più brevemente $6a^2bc$, perchè gli algebristi hanno convenuto di rappresentare aa per a^2, aaa per a^3, ed in generale $aaa\ldots n$ volte per a^n. Se $n = 1$ si scrive a per a^1. Un prodotto della forma $a^m . a^n$ equivale per conseguenza ad ($aaa\ldots m$ *vol.*) ($aaa\ldots n$ *vol.*) cioè ad $aaa\ldots$ $(m+n)$ *vol.* $= a^{m+n}$. Il n.° m nella funzione a^m dicesi *esponente*, la stessa funzione a^m è la potenza m.esima di a; potenza che prende il nome di *quadrato* se $m = 2$, di *cubo* se $m = 3$. (1)

Essendo $m_{,}$, $n_{,}$, due n.i si ha

$$m_{,}a^m b \times n_{,}a^n c = m_{,} \times n_{,} a^{m+n} bc \ldots\ldots$$

Dunque per moltiplicare due monomj *si effettua la moltiplicazione dei coefficienti, ogni lettera comune ad entrambi si scrive con la somma degli esponenti, e le lettere diverse si scrivono di seguito*. In questa guisa l'operazione si effettua ne' coefficienti, ed il resto è un laconico simbolo di una moltiplicazione da farsi. Per es.° $5a^3 b^2 c^2 \times 7a^2 b^5 c^4 d = 35a^5 b^7 c^6 d$.

(1) Il nome di potenza deriva dalla voce greca δυναμις la quale si riscontra nell' Opera di *Diofanto* geometra Alessandrino, che fiorì verso l'anno 365 dell' E. V.

§. 46. I più semplici casi relativi alla moltiplicazione de' polinomj sono espressi per $(a+b)(c+d)$; $(a-b)(c-d)$. Questi però sono due casi *normali* per qualsivoglia moltiplicazione.

Il prodotto $(a+b)(c+d)$ si ottiene con prendere c volte il n.° $a+b$

$$\begin{array}{r} a+b \\ c+d \\ \hline ac+bc \\ +ad+bd \end{array}$$

cioè $(a+b)c=ac+bc$, poi d volte lo stesso n.° $a+b$, ossia $(a+b)d=ad+bd$: la somma de' due risultamenti, cioè $ac+bc+ad+bd$ è il prodotto richiesto.

Per farci strada alla ricerca di $(a-b)(c-d)$ proponiamoci di assegnare il prodotto $a(c-d)$.

Il prodotto di a per c, ossia ac, equivale ad a presa c volte, mentre il risultato richiesto dev'essere = ad a presa $c-d$ volte: bisogna dunque prendere a un n.° d di volte cioè ad e togliere questo prodotto da ac: dunque $a(c-d)=ac-ad$ e però si ha $+a\times-d=-ad$. Passando a moltiplicare $a-b$ per $c-d$, pongasi $a-b=a_{,}$, deducasi $a_{,}(c-d)=a_{,}c-a_{,}d$ e restituito il valore di $a_{,}$ si avrà

$$(a-b)(c-d)=(a-b)c-(a-b)d=ac-bc-(ad-bd)$$

$$\text{cioè (43) } (a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

Dunque $-b\times-d=+bd$.

Qualunque n.° di termini positivi si abbia in vece di a, c; qualunque n.° di termini negativi in vece di b, d, l'operazione è la stessa. L'es.° di $(a+b)(c+d)$ si riferisce dunque alla moltiplicazione di due polinomj i cui

termini sieno tutti positivi: spetta alla moltiplicazione di due polinomj i cui termini sieno in parte negativi, l'es.° di $(a-b)(c-d)$.

Combinando le nozioni prec. si può stabilire: *Che il prodotto di due polinomi* P, $P_{,}$, *si ottiene moltiplicando tutti i termini di* P *per ciascun termine di* $P_{,}$ *a tenore della regola per li monomi, con l'avvertenza di dare il segno* $-$ *ad ogni prodotto parziale i cui fattori sieno affetti da segno diverso, il segno* $+$ *se il segno de' predetti fattori è lo stesso.*

Ogni monomio ed il 1.° termine d'ogni polinomio si riguardano come positivi quando non sono preceduti da verun segno.

Es.° 1.°

$$\begin{array}{l} x+a \\ \underline{x+a} \\ x^2+ax+a^2 \\ \quad\;\underline{+ax\qquad\quad} \\ x^2+2ax+a^2 \end{array}$$

Es.° 2.°

$$\begin{array}{r} x^2+2ax+a^2\qquad\qquad \\ \underline{x+a\qquad\qquad\qquad} \\ x^3+2ax^2+a^2x+a^3 \\ \underline{+ax^2+2a^2x\qquad} \\ x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 \end{array}$$

Es.° 3.°

$$\begin{array}{rl} 3x+4ac & \text{(moltipl.}^{\text{do}}\text{)} \\ \underline{2x-2ax^2} & \text{(moltipl.}^{\text{re}}\text{)} \\ 6x^2+8acx & \rbrace\ \text{prodotto} \\ -6ax^3-8a^2cx^2 & \end{array}$$

ossia $-6ax^3+(6-8a^2c)x^2+8acx$

§. 47. Terminiamo l'attuale artic. con le seg. Osservaz. 1.ª Siccome

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \quad\;\, -ab-b^2 \end{array} \Big\} = a^2 - b^2$$

il prodotto della somma di due n.ⁱ *nella loro differenza è = alla differenza de' quadrati de'* nⁱ *stessi.*

Osserv. 2.ª I termini *simili* del prodotto, quelli cioè *in cui si verifica l'identità delle lettere e degli esponenti*, sempre si debbono ridurre ad uno, sommando i positivi e sottraendo i negativi.

Così $7a^2b+2a^2b-5a^2b=4a^2b$.

Osserv. 3.ª Sovente la moltiplicazione si agevola risolvendo il moltiplicando ed il moltiplicatore ne' respettivi loro fattori.
Così $(9mx-3am)(15m^2x+5am^2)$ si cangia in $3m(3x-a)\times5m^2(3x+a)=15m^3(9x^2-a^2)$.

Osserv. 4.ª Talvolta pe' diversi usi del calcolo giova risolvere il prodotto ne' suoi fattori. Avendosi per es.º il prodotto

$$5a^2b-5ab^2+ac-bc\ (=P)$$

si vede che i due primi termini equivalgono a $5ab(a-b)$, gli ultimi a $c(a-b)$ e però $P=(5ab+c)(a-b)$.

DIVISIONE.

§. 48. Anche la divisione si effettua per rapporto ai coefficienti, si accenna relativamente alle lettere. Così $6b^2d:3a^2$ è $=\frac{2b^2d}{a_2}$

Evvi però questa differenza, che quando il dividendo e il divisore sono affetti da una stessa quantità letterale, si rende più semplice l'operazione sopprimendo il fattore comune (5). Per es.°

$$12a^3\,b^2\,c : 4a^2\,b\,d \text{ è} = \frac{12}{4}\,\frac{a^2\,b}{a^2\,b}.\frac{abc}{d} = 3\frac{abc}{d}.$$

Ciò equivale a scrivere $\frac{12}{4}\,a^{3-2}\,b^{2-1}\frac{c}{d}$.

In generale si scrive $m,a^m\,b : n,a^n\,c = \frac{m,}{n,}\,a^{m-n}\,\frac{b}{c}$.

In fatti, se $m > n$ ed $= n + p$ si ha

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{aaa\ldots n \text{ vol.} \times aaa\ldots p \text{ vol.}}{aaa\ldots n \text{ vol.}} = a^p = a^{m-n},$$

Il simbolo $a^{m-n}\left[=\frac{a^m}{a^n}\right]$ si cangia in a^0 quando $n = m$; ma in questo caso è $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1$:

Dunque $a^0 = 1$.

Resta da indagarsi qual sia il significato di a^{m-n} quando $n > m$.

Posto $n = m + p,$ si ha

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p,}} = \frac{a^m}{a^m.a^{p,}} = \frac{a^m}{a^m}.\frac{1}{a^{p,}} = \frac{1}{a^{p,}}.$$

Dunque a^{m-n} ossia $a^{-p,}$ è $= \frac{1}{a^{p,}}$. Per conseguenza, in vece di $\frac{a^m}{a^n}$ può adottarsi il simbolo compendioso a^{m-n} purchè si convenga essere $a^0 = 1$ ed $a^{-p,} = \frac{1}{a^{p,}}$.

Se b si contiene q volte in a si scrive

$$\frac{a}{b}=q,\ \frac{-a}{-b}=q\ ;\ \frac{a}{-b}=-q\ ,\ \frac{-a}{b}=-q\ :$$

Questa è una necessaria conseguenza di due verità già stabilite; cioè 1.° che il prodotto del quoziente pel divisore coincide col dividendo (15): 2.° che il prodotto di due quantità dotate del medesimo segno è positivo, negativo quello di due quantità di segno diverso (46).

§. 49. La divisione di un polinomio per un altro non soggiace ad alcuna teoretica difficoltà, ma per acquistare un'adequata e semplice idea del metodo con cui si eseguisce, fa d'uopo rintracciare i primi principj da cui dipende.

Sia proposto a dividersi

$$\text{(D)} \ldots 20\,ab^5 + 4a^6 - 25\,a^2\,b^4 - 4\,b^6$$
$$\text{per (d)} \ldots 2\,b^3 + 2\,a^3 - 5\,a\,b^2\,.$$

Scelto il termine del dividendo in cui una lettera componente il medesimo, è affetta dal massimo esponente, per es.° $4a^6$, veggio ch'esso dee provenire dalla reciproca moltiplicazione di due termini, uno del divisore, l'altro del quoziente, ne' quali la potenza di a sia respettivamente massima: da ciò ne inferisco che un termine del quoziente dev' essere $= 4\,a^6 : 2\,a^3$; che in conseguenza, chiamando $2a^3 + t$ il quoziente totale, si ha $(\text{D}) - 2a^3\,(d) = t\,(d)$,,

cioè $(\text{D}_{,}) \ldots 10\,a^4\,b^2 - 25\,a^2\,b^4 - 4\,a^3\,b^3 + 20\,a\,b^5 - 4\,b^6 = t(d)$

Si tratta dunque di trovare il 1.° termine di t, cioè quello in cui a è affetta dal massimo espo-

nente, dividendo (D,) per (*d*) per lo che si procede come sopra. Si evita l' incomodo di scegliere i termini affetti dalla più alta potenza di a, qualora si dispongano i termini del dividendo e del divisore secondo l'ordine delle potenze di a, cominciando dalla massima, come si vede nell'es.° seg. I termini affetti dalla stessa potenza a^m riduconsi ad uno, prefiggendo ad a^m un coefficiente = alla somma de' moltiplicatori di a^m. Così per $2a^m b + 3a^m b^2 c - a^m c^3$ si scrive $(2b + 3b^2 c - c^3)\, a^m$.

$$2a^3 + 5ab^2 - 2b^3 \text{ Quoz.}$$

Divis.re $2a^3 - 5ab^2 + 2b^3$		$4a^6 - 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6$
	1.° Prod.	$-4a^6 + 10a^4b^2 - 4a^3b^3$
	1.° Resid.	$10a^4b^2 - 25a^2b^4 - 4a^3b^3 + 20ab^5 - 4b^6$
	2.° Prod.	$-10a^4b^2 + 25a^2b^4 - 10ab^5$
	2.° Resid.	$-4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6$
	3.° Prod.	$4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6$
	3.° Resid.	0 0 0

Apparisce da quest' es.° che dopo aver diviso $4a^6$ per $2a^3$ si è moltiplicato il divisore pel quoziente parziale $2a^3$, e si è tolto il prodotto dal dividendo. Ottenuto il 1.° residuo si è diviso il 1.° suo termine $10a^4b^2$ pel solito 1.° termine $2a^3$ del divisore. La differenza fra il 1.° residuo ed il prodotto del divisore pel 2.° quoziente parziale costituisce il 2.° residuo, il cui 1.° termine $-4a^3b^3$ diviso per $2a^3$ dà $-2b^3$, che è l' ultimo termine del quoziente perchè si trova $(d) \times -2b^3$, ossia il 3.° prodotto, = 2.° Resid.

Quando si trova un residuo R dove il massimo esponente di a sia minore del massimo in (d) l' operazione cessa; e si compie là divisione aggiungendo $\frac{R}{(d)}$ al quoziente trovato.

Si verifichi $\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} \ldots + a + 1$

$$\frac{\phi^m - \psi^m}{\phi - \psi} = \phi^{m-1} + \phi^{m-2}\psi + \phi^{m-3}\psi^2 \ldots + \phi\psi^{m-2} + \psi^{m-1}$$

CAPITOLO III.

Calcolo delle frazioni letterali

§. 50. Per sommare due frazioni e per sottrarne una dall' altra si riducono al medesimo denominatore, indi si opera su i numeratori. Per es.°

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \text{ è } = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Così $a + \frac{cd - ab}{b - d}$ è $= \frac{a(b-d) + cd - ab}{b - d} = \frac{cd - ad}{b - d}$

Quando le frazioni da sommarsi sono parecchie giova rendere meno incomoda la riduzione al medesimo denominatore, limitandosi a moltiplicare ambedue i termini di ciascuna frazione pel prodotto di que' fattori che non hanno parte nel suo denominatore. Così

$$\frac{a}{b^2 f}, \frac{c}{b\,g}, \frac{d}{f\,h},$$

si trasformano in

$$\frac{agh}{b^2fgh}, \quad \frac{bcfh}{b^2fgh}, \quad \frac{b^2dg}{b^2fgh},$$

e la somma richiesta è $\dfrac{agh+bcfh+b^2dg}{b^2fgh}$

Mediante lo stesso artifizio si trova

$$1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12$$
$$= 28271/27720 = 1 + 551/27720.$$

Il metodo ordinario avrebbe dato

$$\frac{20355120}{19958400}.$$

I fattori per es.° pe' quali fa d'uopo moltiplicare ambedue i termini della 1.ª frazione $1/5$ sono 2, 2, 2, 3, 3, 7, 11.

Moltiplicaz. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Divis.ne $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Fatto $b = 1$ si ha il prodotto ed il quoziente di un intiero per un rotto.
Due frazioni il cui prodotto è $= 1$ diconsi *reciproche*. Tali sono $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$.

§. 51. Le frazioni i cui termini sieno complicati, siccome nè facilmente si concepiscono nè si calcolano comodamente, debbonsi ridurre all'espressione la più semplice con divider-

ne l'uno e l'altro termine pel massimo divisore di entrambi.

Sia $\frac{a}{b}$ la frazione, k il divisor massimo di a e di b.

Se $b < a$ deducasi $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ e quindi $a - q\,b = r$. Siccome il 1.° membro dell'eq. $\frac{a}{k} - q\,\frac{b}{k} = \frac{r}{k}$ è intiero, tale dev'essere il 2.° altrimenti un intiero sarebbe uguale ad un rotto, il che contraddice. Si giungerebbe alla stessa conseguenza se fosse $b > a$ perchè l'eq. $\frac{b}{a} = q_{,} + \frac{r_{,}}{a}$ darebbe $b - q_{,}\,a = r$.

Si tratti la $\frac{r}{b}$ come la frazione $\frac{a}{b}$ nell'ipot. di $b > a$, cioè si deduca $\frac{b}{r} = q_{,} + \frac{r_{,}}{r}$ ossia $b - q_{,}\,r = r_{,}$ e si vedrà che non possono essere b, r divisibili per k senza che sia $\frac{r_{,}}{k}$ $(= \frac{b}{k} - q_{,}\frac{r}{k})$ un n.° intiero. Avvertasi che operando nella stessa guisa sopra una qualunque delle frazioni consecutive $\frac{r}{b}, \frac{r_{,}}{r}, \frac{r_{,,}}{r_{,}} \ldots \frac{r_{(n)}}{r_{(n+1)}}$ si ottiene

$$\frac{r_{(m-1)}}{r_{(m)}} = q_{(m+1)} + \frac{r_{(m+1)}}{r_{(m)}} \text{ cioè}$$

$$r_{(m-1)} - q_{(m+1)}\,r_{(m)} = r_{(m+1)},$$

eq. il cui 1.° membro è divisibile per k in forza dell'eq. antecedente

$$r_{(m-2)} - q_{(m)}\,r_{(m-1)} = r_{(m)},$$

e si concluderà che ciascuno de' residui

dui risultanti dalle respettive divisioni espresse per $\frac{b}{r}$, $\frac{r}{r_{,}}$, $\frac{r_{,}}{r_{,,}}$, $\frac{r_{,,}}{r_{,,,}}$, ... $\frac{r_{(n-1)}}{r_{(n)}}$,

è divisibile per k.

Ciò posto si consideri la serie dell' eq.[i] ausiliari consecutive

$$\left.\begin{array}{l} a-qb=r,\ b-q_{,}r=r_{,}\ ,\ r-q_{,,}r_{,}=r_{,,}\ ,\ r_{,}-q_{,,,}r_{,,}=r_{,,,}\ ,\ \dots \\ \dots\ r_{(n-2)}-q_{(n)}\,r_{(n-1)}=r_{(n)},\ \ r_{(n-1)}=q_{(n+1)}r_{(n)} \end{array}\right\}\ (f)$$

A motivo che ogni residuo è minore del divisore (10) i n.[i]

$$(\ a, b, r, r_{,}\ , r_{,,}\ , \dots\ r_{(n-1)}\ ,\ r_{(n)}\ ) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\ (g)$$

sono intieri decrescenti; e perchè niun quoziente si suppone superiore al vero, sono anche tutti positivi. Ma un seguito di n.[i] intieri, positivi e decrescenti ha necessariamente un limite. Dunque si dee giungere ad un ultimo residuo $r_{(n)}$. Si può adesso dimostrare che l' ultimo residuo $r_{(n)}$ de' n.[i] (g) esattamente divide tutti gli antecedenti, e che $r_{(n)}$ è $=k$.

Il residuo $r_{(n)}$, siccome l'ultimo, è un divisore di $r_{(n-1)}$; dunque anche di $r_{(n-2)}$ in forza della penultima eq. (f), anche di $r_{(n-3)}$ in forza dell'antepenultima, e così in seg. sino ad $r_{,}$, r, n.[i] la cui divisibilità per k porta seco, in forza delle due prime eq.[i] (f) la divisibilità di b e di a per k. Dunque ec. Ma $k > r_{(n)}$ non divide $r_{(n)}$ e però non tutti i n.[i] (g); $k < r_{(n)}$ non è il massimo divisore di b, a. Dunque $k = r_{(n)}$, e si può stabilire la seg.

Reg.[la] *Si divida il termine maggiore pel minore, questi pel residuo, il 1.° residuo pel 2.°, ec. ed il primo divisore esatto è il massimo di cui si tratta.* Quando la frazione è irreduttibile l'ultimo divisore è $=1$.

Osserv. I. Si riguarda come maggiore quello de' due termini della frazione ove una lettera comune ad entrambi ha il maggior esponente.

Osserv. II. Si fa dividendo il residuo quando l'anzidetta lettera è affetta dal medesimo esponente in un residuo e nell'antec. divisore.

Osserv. III. Essendo $m, m_{,}$, n.[i] primi fra loro, se una delle frazioni su cui deesi operare sia $\dfrac{mx^p\ ec}{m_{,}x^{p-n}ec}$ si moltiplica il numeratore per $m_{,}$, n.° che non facendo parte di tutti i termini del numeratore perchè non divide m, non può appartenere a k.

Osserv. IV. Si sopprime qualsivoglia quantità che sia comune a tutti i termini del numeratore, non a quelli del denominatore e viceversa. Ciò serve a sbarazzare la frazione dai fattori estranei al massimo divisore k.

Osserv. V. Per ordinare i termini secondo le potenze di una stessa lettera a si fa sempre la riduzione di quelli che trovansi affetti dalla stessa potenza di a. Ciò dipende dai principj su cui è fondata la divisione algebrica.

Osserv. VI. Se tutti i termini del numeratore e del denominatore, che suppongo ordinati per le potenze della stessa lettera, sieno affetti da un fattore comune M, questi si sopprima e procedasi alla ricerca del massimo

comune divisore h della nuova frazione: il prodotto Mh è il divisore cercato, divisore che si riduce ad M se si trova $h=1$.

Ciò succede per es.° nella frazione

$$\frac{(b^2-c^2)a^4+(b^3-bc^2)a^3+b^4c^2-b^2c^4}{(b-c)a^2+(b^2-bc)a+b^3-b^2c}$$

i cui termini sono divisibili per $b-c$, e non lasciano luogo ad alcun divisore dipendente da a; laddove per rapporto alla frazione

$$\frac{54a^2b-24b^3}{45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4}$$

si trova $M=3b$ ed $h=3a+2b$:
quindi $k=3b(3a+2b)$.

Es.° 1.° Sia la frazione $\dfrac{6a^3-6a^2b+2ab^2-2b^3}{4a^2-5ab+b^2}$

In vece di sopprimere il fattore 2 comune a tutti i termini del numeratore, il che ci obbligherebbe a moltiplicare il numeratore stesso per 4 onde poter fare la divisione, si moltiplichi per 2, cifra non comune ai termini del denominatore. Il 1.° quoziente è $3a$, il residuo

$$3a^2b+ab^2-4b^3.$$

Soppressa la lettera b si divida

$$3(4a^2-5ab+b^2) \text{ per } 3a^2+ab-4b^2.$$

Si ha 4 per quoziente e $-19ab+19b^2$ per

residuo. Sopprimasi il fattore $19b$, si faccia la divisione di

$$3a^2+ab-4b^2 \text{ per } -a+b,$$

e siccome ne proviene il quoziente esatto $-(3a+4b)$ si ha $k=-a+b$, e la proposta divisa per $-a+b$ si riduce a

$$\frac{2b^2+6a^2}{4a-b}$$

Es.° 2.° Avendosi $\frac{5a^3-18a^2b+11ab^2-6b^3}{7a^2-23ab+6b^2}$

si moltiplica il dividendo per 7, si ha $5a$ per quoziente, e per residuo

$$-11a^2b+47ab^2-42b^3$$

che si riguarda come dividendo (Osserv. 2.ª) Soppresso b si moltiplica per 7 e si divide

$$-77a^2+329ab-294b^2 \text{ per } 7a^2-23ab+6b^2,$$

Compiuta l' operazione trovasi $k=a-3b$.

Es.° 3.° La frazione proposta essendo $^{143}/_{637}$ il metodo generale dà

$$\frac{a}{b}={}^{637}/_{143}=4+{}^{65}/_{143}\left(=q+\frac{r}{b}\right)$$

$$\frac{b}{r}={}^{143}/_{65}=2+{}^{13}/_{65}\left(=q_{,}+\frac{r_{,}}{r}\right)$$

$$\frac{r}{r_{,}}={}^{65}/_{13}=5\ (=q_{,,}).$$

Dunque $k=r_{,}=13$.

§. 52. Quando si trova $k = 1$ ovvero = ad un piccol n.° sovente giova cercare una frazione più semplice il cui valore non sia eguale ma prossimo a quello della frazione proposta. Indicando generalmente per x la frazione onde si tratta. Supponngasi $x = 1103/887$. Siccome

$$1103/887 = 1 + 216/887;\ 216/887 = 1 : 887/216 = 1 : (4 + 23/216);$$

$$23/216 = 1 : 216/23 = 1 : (9 + 9/23);\ 9/23 = 1 : 23/9 = 1 : (2 + 5/9);$$

$$5/9 = 1 : 9/5 = 1 : (1 + 4/5);\ 4/5 = 1 : 5/4 = 1 : (1 + 1/4)$$

basta fare le sostituzioni successive per ottenere

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{23}{216}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{9}{23}}} \ldots = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{9}}}}$$

$$= 1 + 1/4 + 1/9 + 1/2 + 1/1 + 4/5 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/4$$

Quest'espressioni diconsi frazioni continue. Il primo che le indicò ai geometri fu l'Inglese *Brounker*, il quale in una lettera a *Gio. Wallis* assegnò il rapporto del circolo al quadrato del diametro sotto la speciosa forma

$$1 : 1 + 1/2 + 3^2/2 + 5^2/2 + 7^2/2 + 9^2/2 \text{ ec.}$$

I n.i $1,\ 1 + 1/4 = 5/4,\ 1 + 1/4 + 1/9 = 1 + 9/37 = 46/37$, ec.

sono altrettante espressioni più semplici ed approssimate della frazione proposta e perciò diconsi *frazioni convergenti:* la prima $1/1$ è minore della suddetta frazione, la seconda $5/4$ n'è maggiore, e così alternativamente.

Infatti si ha $1 < 1 + 1/4 + 1/9$ ec.

e perchè $1/4 > 1/4 + 1/9$ ec.; $1/4 + 1/9 < 1/4 + 1/9 + 1/4$ ec.

si ha $1 + 1/4 > 1 + 1/4 + 1/9$ ec.

$1 + 1/4 + 1/9 < 1 + 1/4 + 1/9 + 1/8$ ec. ec. ec.

Questa osservazione è generale, cioè indipendente dalla grandezza de' successivi denominatori e dal num.° de' termini consecutivi: Purchè il 1.° termine sia intiero, un n.° dispari di termini forma una frazione convergente manchevole; un n.° pari la dà eccedente. Succede il contrario se il 1.° termine della frazione continua è un rotto.

§. 53. Per ottenere la frazione continua sotto forma algebrica dicasi a il n.° intiero prossimamente minore di una qualunque data frazione x: Siccome la differenza fra x ed a è < 1 può supporsi $x = a + \frac{1}{x_{,}}$, essendo $x_{,} > 1$. Trovato il n.° intiero $a_{,}$ prossimamente $< x_{,}$ pongasi $x_{,} = a_{,} + \frac{1}{x_{,,}}$, e così

$x_{,,} = a_{,,} + \frac{1}{x_{,,,}}, \ldots x_{(n-1)} = a_{n-1} + \frac{1}{x_{(n)}}$, e si avrà

$$x = a + \frac{1}{a_{,}} + \frac{1}{a_{,,}} \text{ ec. } + \frac{1}{a_{(n)}}$$

funzione che più compendiosamente si rappresenta per $x = a\,(a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, \ldots a_{n})$.

Le quantità $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$ ec. diconsi *quozienti completi* e sono tutte positive se $a_{,} < x_{,}$, $a_{,,} < x_{,,}$, ec. come si è supposto; negative se si prende $a_{,} > x_{,}$, $a_{,,} > x_{,,}$, ec. Quando il n.° intiero prossimo maggiore è più vicino al vero giova preferirlo al prossimo minore, per avere uno sviluppamento più semplice e più rapido: i Geometri per altro hanno convenuto di rinunziare a questo vantaggio, perchè si trova incompatibile con la caratteristica prerogativa delle frazioni convergenti (§. prec.)

Giova quì osservare 1.° Che qualora uno de' quozienti $a_{,}$, $a_{,,}$ ec. sia $= 1$ il quoziente che lo precede non è il n.° intiero più vicino al vero. Se per es.° $a_{,} = 1$ si ha

$x_{,} \left(= a_{,} + \frac{1}{x_{,,}}\right) < 2$; $\frac{1}{x_{,}} > 1/2$, $x - a > 1/2$ e però a non è l'intiero più vicino al vero.

2.° Che quantunque lo sviluppamento della frazione sia infinito si ha esattamente

$$x = a + \cfrac{1}{a_{,} \text{ ec.} + \cfrac{1}{x_{(n)}}} \quad \text{perchè } x_{(n)} \text{ è} = a_{(n)} + \cfrac{1}{a_{(n+1)} + \text{ec.}}$$

§. 54. Affinchè si valuti sin d'ora l'importanza delle regole stabilite ne' §§. prec. noi passiamo ad osservare 1.° che per mezzo di esse si risolve qualunque più complicata eq. di 1.° grado ad una sola incognita: 2.° che si determina il valore delle incognite x, y, spettanti ad un sistema di eq.^{i} come

$$(ax + by = c,\ a_{,}x + b_{,}y = c_{,}) \ldots . (h)$$

3.° Che si risolve completamente in n.[i] intieri ogni eq. della forma $a x + b y = c$ .... (i)

La 1.ª proposizione si rende manifesta qualora si rifletta che l' incognita non può essere modificata da quantità cognite che mediante le quattro operazioni del calcolo, che in conseguenza bastano le operazioni contrarie per isolarla.

Avendosi per es.° l' eq.

$$\frac{(a-b)}{b-c}(x+c)-b=x+\frac{ab}{a+b}$$

si tolgono le frazioni con moltiplicare tutti i termini per $(b-c)(a+b)$, il che dà

$$(a-b)(a+b)(x+c)-b(b-c)(a+b)=(b-c)(a+b)x+ab(b-c)$$

Effettuate le operazioni questa si riduce ad

$$a^2x-b^2x+a^2c-b^2c-ab^2+abc-b^3+b^2c=$$
$$abx+b^2x-acx-bcx+ab^2-abc.$$

Si traspongano nel 1.° membro i termini che sono affetti da x nel 2.°, ed in questo i termini cogniti del 1.°, onde si abbia

$$a^2x-2b^2x-abx+acx+bcx=2ab^2-2abc+b^3-a^2c$$

cioè $(a^2-2b^2-ab+ac+bc)x=2ab^2-2abc+b^3-a^2c$,

e dividendo l' uno e l' altro membro pel quintinomio che moltiplica x, si otterrà

$$x=\frac{2ab(b-c)+b^3-a^2c}{a^2-2b^2-ab+ac+bc}$$

Probl. 1.° Una trota è stata pagata 7 soldi la libbra, e questo prezzo corrisponde a tanti soldi e tanti denari la libbra quante libbre pesa. Si cerca il peso. Soluz. Si ha

$$x^{s.} + \frac{x^{s.}}{12} = 7\text{: quindi } x = 6^{lib} + \frac{6}{13}.$$

Probl. 2.° Alcuni amici contribuiscono scudi 6, ciascuno, per un festino, e promettono al padrone della casa la metà della tassa di scudi 6, che vuolsi esigere da' socj sopravvenienti. Si sa che il n.° de' socj è cresciuto di $\frac{1}{4}+3$, che ciascuno de' primi ha speso $5.^{sc.}$ e si cerca il n.° di questi. Soluz.

$$6\,x^{sc.} - 3\,(\tfrac{1}{4}\,x + 3)^{sc.} = 5\,x$$

e però $x = 36$.

§. 55. Passando a considerare il sistema dell' eq.^{i} (h), giova ragionare nella maniera seguente: Se si conoscesse il valore numerico dell'incognita y si trasporrebbero i termini $by, b_{,}y$, onde avere

$$a\,x = c - b\,y\,,\; a_{,}\,x = c_{,} - b_{,}\,y$$

e queste, siccome della forma $ax = \mathrm{A}, a_{,}x = \mathrm{A}_{,}$, darebbero respettivamente

$$x\;(= \frac{\mathrm{A}}{a}) = \frac{c - by}{a}\,,\; x\;(= \frac{\mathrm{A}_{,}}{a_{,}}) = \frac{c_{,} - b_{,}y}{a_{,}};$$

valori che dovrebbero essere identici, perchè ricavati da due eq.^{i} spettanti per ipot. ad uno

stesso probl. Qualunque per tanto sia il valore d'y necessariamente si ha

$$\frac{c-by}{a} = \frac{c_{,}-b_{,}y}{a_{,}} \dots (k)$$

eq. di 1.° grado ad una sola incognita da cui si ritrae

$$a_{,}c-a_{,}by=ac_{,}-ab_{,}y, \text{ossia} (ab_{,}-a_{,}b)y=ac_{,}-a_{,}c,$$

e quindi $y=\dfrac{ac_{,}-a_{,}c}{ab_{,}-a_{,}b}\dots(l)$

Dunque $x=\dfrac{1}{a}\left(c-\dfrac{b(ac_{,}-a_{,}c)}{ab_{,}-a_{,}b}\right)=\dfrac{cb_{,}-c_{,}b}{ab_{,}-a_{,}b}\dots(m$

Si sarebbe avuta la stessa formola per x sostituendo l'espressione d'y in una dell'eq.[i] componenti il sistema (h). L'operazione per cui si è ottenuta l'eq. (k) libera dalla x dicesi *eliminazione*.

Probl. 1.° Tizio lascia ai nepoti 120 000 scudi con la condizione che i maschi ne abbiano 12000, le femmine 9000. Così resta esaurita l'eredità: Avanzerebbero scudi 9000 nel caso che se ne dessero 12000 alle femmine e 9000 ai maschi. Quanti sono i nepoti dell'uno e dell'altro sesso? Soluz. Sia x il n.° de' maschi, y quello delle femmine. Per ipot. dev' essere 12000 preso x volte più 9000 preso y volte, cioè

$$12000\,x + 9000\,y = 120000.$$

Ma prendendo 12000 y volte e 9000 x volte, cioè $9000\,x + 12000\,y$ si ha un n.° di scudi

$= 120000 - 9000$: dunque il probl. ammette quest' altra eq.

$$9000\,x + 12000\,y = 111\,000:$$

Per agevolare la determinazione d' x e d' y dividasi l' una e l' altra eq. per 1000 onde avere

$$12x + 9y = 120,\quad 9x + 12y = 111:$$

la formola (m) dà $x = \frac{120 \times 12 - 111 \times 9}{12 \times 12 - 9 \times 9}$

e dividendo tutti i termini per 9,

$$x = \frac{40 \times 4 - 111}{16 - 9} = \frac{49}{7} = 7.$$

Dalla 1.ª $y = \frac{120 - 12\,x}{9} = \frac{120 - 84}{12} = \frac{36}{9} = 4.$

Probl. 2.° Si hanno due scatole A, B ed in ciascuna un certo n.° di monete. Passandone una da A in B il n.° è pari in entrambe, ma se da B se ne passano due in A questa ne ha il doppio di quelle che restano in B. Quante sono le monete in A, quante in B? Soluz. $x = 10, y = 8$.

Probl. 3.° Una società di uomini e di donne, 30 fra tutti, ha fatta una veglia di ballo che ha costato 147 lire. Ciascun uomo ha speso lire 6 $\frac{1}{2}$, lire 2 $\frac{1}{2}$ ciascuna donna. Si cerca il n.° degli uni e delle altre. Soluz. $x = 18$, $y = 12$.

§. 56. Qualsivoglia probl. che dipenda dall' eq. $ax \pm by = c$ è *indeterminato*, perchè a qualunque valore $y_{\prime}$ d' y corrisponde un valore d' x espresso per $x_{\prime} = \frac{c \mp b y_{\prime}}{a}$

I probl. di tal natura non presentano nè difficoltà nè importanza. Essi divengono pregevoli e non difficili quando il valore d' x, y vuolsi intiero e positivo: allora diconsi *semi-determinati*.

Essendo $a < b$ deducasi $x = \frac{c \mp by}{a}$. Si dedurrebbe $y = \frac{c \mp ax}{b}$ se fosse $a > b$. Fatta la divisione per a sia $\frac{c_{,} \mp b_{,} y}{a}$ il residuo; pongasi $\frac{c_{,} \mp b_{,} y}{a} = t$ e se ne ricavi $y = \frac{c_{,} \mp at}{b_{,}}$: si faccia la divisione per $b_{,}$ e si ponga il residuo $\frac{c_{,,} \mp a_{,} t}{b_{,}} = t_{,}$ per trarne $t = \frac{c_{,,} \mp b_{,} t_{,}}{a_{,}}$, e si prosegua finchè giungasi ad un' eq.

$$t_{(n)} = c_{(n+2)} \mp h t_{(n+1)}.$$

Dopo di ciò non resta che retrocedere da $t_{(n)}$ sino ad y ed x, onde avere le x, y, espresse per $t_{(n+1)}$, cioè le formole che danno tutte le soluzioni del probl.

Probl. 1.° Un negoziante vuol saldare un debito di lire 1200 con tante braccia di panno di due qualità, una da 5 l'altra da 7 lire, e cerca se può farlo ed in quante maniere. Soluz.ne Sia x, y il respettivo n.° delle braccia. L'eq. del probl. è $5x + 7y = 1200$.

Quindi $x = \frac{1200 - 7y}{5} = 240 - y - \frac{2y}{5}$; $\frac{2y}{5} = t$, però $y = 2t + \frac{1}{2}t$, e perchè $\frac{1}{2}t = t_{,}$ dà $t = 2t_{,}$, risulta $y = 5t_{,}$, $x = 240 - 7t_{,}$:

Pongasi $t_{,} = 0, 1, 2, \ldots 34$ e si avranno le 35 soluzioni possibili (1).

Probl. 2° Una Società di cavalieri e dame ha fatto una cena il cui prezzo è stato di 1000 lire: ogni cavaliere ha speso 19 lire, ogni dama lire 13. Quanti erano i commensali dell' uno, quanti quelli dell'altro sesso? Soluz. Dall' eq. del probl. $19x + 13y = 1000$ si ritrae

$$y = \frac{1000 - 19x}{13} = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}$$

L' ipot. $\frac{12-6x}{13} = t$ dà $x = \frac{12-13t}{6} = 2 - 2t - \frac{t}{6}$

e facendo $\frac{t}{6} = t_{,}$ risulta $t = 6t_{,}$

$$x = 2 - 13t_{,},\ y\left[= 76 - (2 - 13t_{,}) + 6t_{,}\right] = 74 + 19t_{,},$$

I valori che possono darsi a $t_{,}$ sono 0, −1, −2, −3: quindi le 4 soluzioni:

$x=2, y=74$; $x=15, y=55$; $x=28, y=36$; $x=41, y=17$.

Probl. 3.° Contando a 3 per 3 un n.° di monete, che si sa essere < 300, non si trova residuo: ne resta una se si contano a 7 per 7, 6 se a 10 per 10. Quante sono? Soluz.ne Chiamando x il n.° cercato è chiaro che si ha

$$\frac{x}{3} - \left(\frac{x-1}{7} + \frac{x-6}{10}\right) = y \text{ (n.° int.°)},$$

(1) Se ad imitazione di un moderno autore avessimo dedotto $y = \frac{1200-5x}{7}$ sarebbero state necessarie tre eq. ausiliari.

cioè $19x+156=210y$, ed $x=11y-8+\frac{y-4}{19}$

L'ipot. $\frac{y-4}{19}=t$ dà $y=19t+4$, $x=210t+36$.

Ma $210t+36<300$ e però $t\left(<\frac{264}{210}<2\right)=1$: dunque $x=246$.

Probl. 4.° Si sono spese 40 lire nella compra di 20 uccelli, pernici, anatre ed oche, e si sa che ciascuna ha costato respettivamente 1, 4, 6 lire. Si dimanda il n.° degli uccelli di ciascuna specie. Soluz.ne L' eq.i del probl. sono

$$x+y+z=20,\ x+4y+6z=40.$$

Quindi $3y+5z=20$, $y=\frac{20-5z}{3}=6-z+\frac{2-2z}{3}$.

Sia $\frac{2-2z}{3}=u$ è però $z=\frac{2-3u}{2}=1-u-\frac{1}{2}u$, e fatto $u=2t$ si avrà $z=1-3t$, $y=5(1+t)$.

Non resta che supporre $t=0$ per avere $y=5$, $z=1$, $x=14$.

L'enunciazione e la soluzione del prec. probl. sono l'una e l'altra comprese in un antico epigramma riportato da *Pitèo* (Lib. 4) ed è il seg.

Ut tot emantur aves bis denis utere nummis, (1)
Perdix, anser, anas, empta vocetur avis.
Sit simplex obolus pretium perdicis, ematur
Sex obolis anser, bisque duobus anas.

(1) Il *nummo* vale due *oboli*.

Ut tua procedat in lucem quæstio, mentem
Consule: sic loquitur pectoris arca mihi.
Sint anates tres atque duæ, simplex erit anser,
Accipe perdices quatuor atque decem.

Probl. 5.° Si vogliono pagare paoli 405 con monete da 5 e da 10 paoli. In quante maniere può ciò farsi. Risp. in 40.

Probl. 6.° La somma da pagarsi è di lire 109, le monete che si hanno sono di 5 e di 24 lire. Risp. Il pagamento può farsi in una sola maniera, dando 17 monete da lire 5 ed una da 24.

Probl. 7.° Un mercante cambiò brillanti in perle ed ebbe inoltre lire 16; ogni brillante costa 1872.li, ogni perla lire 253. Si cerca il n.° delle perle e quello de' brillanti. Risp.

N.° delle perle — N.° de' brill.

$x = 1872t - 592$; $y = 253t - 80$,

e le soluzioni sono infinite.

L' indole talvolta, non l' insufficiente n.° delle condizioni, rende indeterminato il probl. Tal è per es.° la questione 46.a di *Diofanto* (Arithmeticorum Lib. IV.)

Probl. 8.° Trovare tre n.i x, y, z, (dove $x > y$, $y > z$) tali che sia (*u*) ($x^2 - y^2 : y - z :: m : n$), e ciascuna delle somme $x + y$, $x + z$, $y + z$, sia un quadrato.

Indicando un quadrato qualunque con la lettera q pongasi $x + y = 16q$. Risulta $x > 8q$ ed $x + z > 8q$. Sia $x + z = 9q$, e supponendo provvisoriamente $x = 8q + 2$, si avrà $y = 8q - 2$, $z = q - 2$. Ma $x^2 - y^2 = 64q$, $y - z = 7q$, e

fatto $m=3$, $n=1$ la proporzione (a) si riduce a $64q=21q$. Bisogna dunque correggere le ipot. $x=8q+2$, $y=8q-2$.

Siccome $64q=2q\times32$ è necessario trovare un n.° che moltiplicato per 32 dia 21. Tale è $^{21}/_{32}$, e facendo $x=8q+{}^{21}/_{32}$, $y=8q-{}^{21}/_{32}$ si ha $z=q-{}^{21}/_{32}$ e le tre prime condizioni sono soddisfatte. Resta da soddisfarsi alla 4.ª $y+z=q$.

I valori prec. danno $y+z=9q-{}^{42}/_{32}$ ed il 2.° membro di questa eq. può supporsi $=(3q_{,}-6)^2=(3q_{,}-7)^2=$ ec. dove $q_{,}=\sqrt{q}$. Fatta la 1.ª ipot. risulta.

$$36(1-q_{,})=-{}^{21}/_{16},\ 1-q_{,}=-{}^{21}/_{576},\ q_{,}={}^{597}/_{576};$$
$q\,(=q_{,}^2)={}^{356409}/_{331776}$, $q-{}^{21}/_{32}={}^{138681}/_{331776}=z$; quindi
$$y={}^{2633544}/_{331776},\ x={}^{3069000}/_{331776}.$$

Si trovano altre soluzioni assumendo per 1.ª ipot. $x+y=9q$, $x+y=25q$, ec. ec.

L'addotta soluzione offre un saggio dell'analisi numerica de' Greci, analisi che in molti casi supplisce all' insufficienza dell'analisi algebrica, e di cui *Diofanto*, onore dell' Accademia Alessandrina, ci ha lasciato un grandissimo numero di eleganti applicazioni.

Talvolta si ottiene l' intento con un' acconcia trasformazione:

Probl. 9.° Trovare due n.ⁱ razionali x, y, tali che sia $x^2+y=q$, $y^2+x=q_{,}$.

Soluz.ⁿᵉ Facendo $q=(t-x)^2$, $q_{,}=(u-y)^2$ si ottiene $y=t^2-2tx$, $x=u^2-2uy$:

Quindi $y=\dfrac{t(2u^2-t)}{4tu-1}$, $x=\dfrac{u(2t^2-u)}{4tu-1}$,

Dove per t ed u può sostituirsi qualunque n.° razionale.

Per dare un'idea dell'analisi *meno che semideterminata*, la quale si occupa de' probl., il n.° delle cui condizioni eguaglia quello delle incognite diminuito di 2, sia

Probl. 9.° Una società di 100 persone, uomini, donne, ragazzi e ragazze, hanno fatta una cena che ha costato cento lire. Gli uomini hanno speso tre lire per ciascheduno, le donne una lira, i ragazzi $\frac{1}{2}$, le ragazze $\frac{1}{7}$ di lira. Quanti erano gli uomini, le donne, i ragazzi e le ragazze? Soluz.ne L' eq.i del probl. sono

$$x+y+z+u=100,\ 3x+y+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{7}u=100^{li}\ \ldots(a)$$

La 2.a equivale a $42x+14y+7z+2u=1400$

ed eliminandone u mediante la 1.a eq. diviene

$$40x+12y+5z=1200\ \ldots(b)$$

Pongasi $1200-12y=i$ e si consideri l'eq.
$40x+5z=i$, ossia $8x+z=i_{,}$,

dove $i_{,}=240-\dfrac{12y}{5}$, .. (c)

Avvertasi che in forza dell'eq. (a) u è multiplo di 7; che dall' eq. (b) risulta
$10x+3y=300-\dfrac{5.z}{4}$ cioè z multiplo di 4 : che l'eq. (c) dà y multiplo di 5, e si concluderà che dev'essere $y=5, 10, 15, \ldots\ldots 85$, dove 85 è il valore massimo perchè $y=90, 95$ ec.

combinato coi minimi respettivi valori 1, 4, 7 d' x, z, u, oltrepassa la somma assegnata, $= 100$; che per ottenere tutte le soluzioni basta fare successivamente $y = 5, 10$ ec. $= 85$, e sostituire per z tutti i possibili multipli di 4, conciliabili con l'eq. $x = \frac{i' - z}{8}$, la quale dee dare per x un valore intiero e positivo. In questa guisa si raccoglie $y = 5$, $z = 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68$;
$x \left(= \frac{228 - z}{8}\right) = 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20$;
$u (= 100 - x - y - z) = 63, 56, 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7$.
Per es.° $y = 10$ dà $z = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64$;
$x \left(= \frac{216 - z}{8}\right) = 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19$;
$u = 56, 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7$.

Le soluzioni sono 81.

Riducendo il probl. prec. ad una proposizione generica, cioè: Dividere un n.° dato in un qualunque dato n.° di parti in guisa, che moltiplicando ciascuna per un n.° dato, la somma de' prodotti faccia un n.° parimente dato, ma compreso fra i prodotti de' divisori massimo e minimo pel dividendo, si ha quello che *Gasparo Bachet* disse *pulcherrimum probl.^{ma} quod omnium arithmeticorum ingenia mire torsit*.

Probl. 10.° Un viaggiatore, condotto ad osservare una libreria ricca di codici antichi, offre per ogni codice greco tanti zecchini quanti sono i codici in tale idioma: fa la stessa offerta per li codici arabi, ed esibisce poi per un rarissimo codice siriaco un n.° di zecchini eguale

le al prodotto de' n.[i] che respettivamente esprimono quello de' codici greci e degli arabi. Sapendosi che la totale somma offerta consiste in 144 strati di zecchini disposti in quadrato, e che i codici greci, come pure gli arabi, sono fra 80 e 100, si cerca il n.° di questi e di quelli, ed il valore della somma offerta. Soluz.[ne] I codici greci sieno x, y gli arabi, z gli zecchini d'ogni strato, e l'eq. del probl.

$$x^2 + xy + y^2 = 144 z^2,$$

facendo $x = u - \frac{1}{2} y$ diverrà $(24z)^2 - (2u)^2 = 3y^2$, che mediante le ipotesi

$$24z = \omega, \; 2u = \varphi, \; y = t.v$$

si trasforma in $(\omega - \varphi)(\omega + \varphi) = 3t^2 . v^2$.

Quindi $\omega - \varphi = 3t^2$, $\omega + \Phi = v^2$, cioè (47 Osserv. 1.ª)

$$\omega = \tfrac{1}{2}(v^2 + 3t^2), \; x = \tfrac{1}{2}(v^2 - 3t^2),$$

e con qualche riflessione si vede, che per soddisfare ai limiti d'x e d'y bisogna supporre $t = 4$ e $v = 24$. Così

ottiensi $\omega = 312$, $\varphi = 264$, $u = 132$, $y = 96$,

$$x \left(= u - \tfrac{1}{2} y\right) = 84, \; z \left(= \frac{\omega}{24}\right) = 13.$$

Nell'Analisi Semideterminata avrem'occasione di risolvere lo stesso probl. in altra guisa, ricavandone la soluzione come un caso particolare di quella dell'eq.

$$a^2x^2 + bxy + cy^2 = h^2z^2.$$

Per rapporto all'eq. $ax \pm by = c$ giova fare le osservazioni seg.

1.° Che i n.[i] a, b, c possono supporsi intieri perchè dipende dall' arbitrio del calcolatore il renderli tali.

2.° Che a, b possono supporsi n.[i] primi fra loro. La ragione si è che se fosse $a = a_{,} \theta$, $b = b_{,} \theta$ dovrebb' essere $a_{,} x \pm b_{,} y = \frac{c}{\theta}$ cioè θ divisore anche di c, e però $\frac{c}{\theta} = c_{,}$

La proposta equivarrebbe pertanto ad $a_{,} x \pm b_{,} y = c_{,}$, dove $a_{,}, b_{,}$ sono primi fra loro

3.° Che conoscendo una soluzione ($x = x_{,}$ $y = y_{,}$) dell' eq. $a x - b y = c$ si hanno tutte mediante le formole.

$$(x = b t + x_{,} , y = a t + y_{,}) \dots (1)$$

dove t rappresenta un n.° intiero, anche negativo purchè sia $t < \frac{x_{,}}{b}$, e $< \frac{y_{,}}{a}$. In fatti resta generalmente soddisfatta l' eq.

$$a (b t + x_{,}) - b (a t + y_{,}) = c.$$

4.° Che non essendovi limite che impedisca l' aumento di t, le soluzioni di $a x - b y = o$ sono infinite.

5.° Che la soluzione generale dell' eq. $a x + b y = c$ è compresa nelle formole:

$$x = x_{,} - b t , y = a t - y_{,} .$$

6.° Che siccome dev' essere $t < \frac{x_{,}}{b}$ e $> \frac{y_{,}}{a}$ il n.° delle soluzioni è sempre limitato. Non ve n' è alcuna quando i pred.[i] rapporti sono inconciliabili.

7.° Che in forza delle formole (1) i successivi valori d'x spettanti ad $a\,x - b\,y = c$, differiscono di b, coefficiente d'y, e quelli d'y differiscono di a, coefficiente d'x, cosicchè i primi sono $x_{,}$, $x_{,} + b$, $x_{,} + 2b$, ... $x_{,} + bt$. i secondi $y_{,}$, $y_{,} + a$, $y_{,} + 2a$, ... $y_{,} + at$.

Per mezzo di quest' ultima osservazione possiamo dimostrare una proposizione interessante, ed è:

Che qualora non si escludano i valori negativi d'x, y, fra le soluzioni di $a\,x - b\,y = c$ ve n'è sempre una in cui si ha $x = \text{ò} < \pm {}^{1}/_{2}\, b$, ed una in cui si ha $y = \text{ò} < \pm {}^{1}/_{2}\, a$.

Supponendo successivamente

$x_{,} > {}^{1}/_{2} b$ e $< b$; $x_{,} > b$ e $< {}^{3}/_{2} b$; $x_{,} > {}^{3}/_{2} b$ e $< 2b$; $x_{,} > 2b$ e $< {}^{5}/_{2}\, b$; ec.

risulta infatti nel 1.° caso $x_{,} - b < - {}^{1}/_{2}\, b$; nel 2.° $x_{,} - b < {}^{1}/_{2}\, b$; nel 3.° $x_{,} - 2b < - {}^{1}/_{2} b$; nel 4.° $x_{,} - 2b < {}^{1}/_{2}\, b$; ec. Dicasi lo stesso per rapporto ad y e si concluderà ec.

La verità precedentemente dimostrata ci conduce a stabilire il seg. canone importantissimo:

Conoscendo un n.° intiero b, *e sapendosi che un intiero* a *è primo per rapporto ad esso, si possono determinare due n.*ⁱ *intieri* x, y *che sodisfacciano all' eq.* a x − b y = c, *qualunque sia il n.° intiero* c; *con la condizione inoltre che* x *non superi* ${}^{1}/_{2}$ b. (1)

(1) Il §. attuale ha tutta l'apparenza di un'eccezione alla legge prefissaci, di trattare di seguito le respettive teorie, ma un'eccezione

CAPITOLO III.

Combinazioni e Permutazioni.

§. 57. Dati m elementi $a, b, c, d, \ldots$ determinare in quante maniere possono insieme assortirsi prendendone n alla volta, con la condizione che non si abbiano due assortimenti composti degli elementi stessi, è un probl. fondamentale del calcolo algebrico, essenzialmente connesso coll'altro, che ha per oggetto di assegnare i cangiamenti d'ordine fra gli elementi che appartengono agli assortimenti sopra indicati. I risultamenti del 1.° probl. diconsi *combinazioni*, *permutazioni* quelli del 2.°

Per es.° gli elementi a, b, c assortiti a due danno le combinazioni binarie, o di 1.° ordine, *ab*, *ac*, *bc*. Le permutazioni analoghe sono *ab*, *ba*; *ac*, *ca*; *bc*, *cb*. Con la stessa facilità si ottengono le combinazioni ternarie, o di 2.° ordine, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, fra gli elementi *a*, *b*, *c*, *d*. Ciascuna di esse dà 6 permutazioni: dalla 1.ª per es.° si deduce *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*: perciò il n.° delle permutazioni ternarie fra 4 elementi è = 24.

comandata da un regolamento, ch'esige ne' primi due tomi, destinati pel 1.° anno delle nostre lezioni, i rudimenti dell'analisi semideterminata; un'eccezione che ha il pregio di preparare i fondamenti di un canone essenziale nella teoria de' numeri; un'eccezione d'altronde opportunissima per ravvivare l'attenzione de' giovani, è per nostro avviso giustificata plausibilmente; tanto più ch' ella non distrae alcuno degli scelti metodi generali che costituiscono l'analisi sopraindicata, ma unicamente consiste in semplici artifizj, forse non del tutto inetti a servirle di preliminare.

Qualunque sia il n.° intiero m le permutazioni binarie si formano collocando alla destra di a ciascuno degli altri $m-1$ elementi b, c, ec. alla destra di b ciascuno degli altri $m-1$ elementi a, c, ec. e così fino all'elemento m.^{esimo} Per conseguenza il n.° delle anzidette permutazioni è $= m(m-1)$.

Il prec. n.°, siccome contiene ab e ba, ac e ca, ec. è doppio di quello delle combinazioni analoghe: perciò il n.° delle combinazioni binarie fra m elementi è $= \frac{1}{2} m(m-1)$.

Alla destra d'ogni permutazione binaria scrivasi ciascuno degli $m-2$ elementi non compresi in essa e si avranno tutte le permutazioni ternarie fra m elementi. Si ha per es.°

$$a.bc, a.cb; b.ac, b.ca; c.ab, c.ba.$$

Il n.° delle permutazioni onde si tratta è dunque $= m(m-1)(m-2)$.

Avvertasi che in questa guisa una stessa terna di elementi vien ripetuta 6 volte, e si concluderà che il n.° delle combinazioni ternarie fra m elementi è $\frac{1}{2.3} m(m-1)(m-2)$.

Inoltrando l'analisi prec. si raccoglie per induzione che la respettiva formola esprimente il n.° delle permutazioni e delle combinazioni fra m elementi presi n alla volta, è

$$m(m-1)(m-2) \ldots [m-(n-1)];\ \frac{m(m-1)(m-2) \ldots [m-(n-1)]}{2.\ 3.\ 4 \ldots n}$$

* § 58. Per ottenere le stesse formole con un metodo rigoroso dicasi $x_{m,n}$ il n.° delle permu-

tazioni fra m elementi presi n alla volta. Distinguendo quelle che hanno per iniziale a, b, ec. si formano m classi eguali, e ciascuna, prescindendo dall'iniziale, presenta tutte le permutazioni fra $m-1$ elementi presi $n-1$ alla volta. Dunque $x_{m,n}=mx_{m-1,n-1}$, eq. vera qualunque sieno m,n, purchè intieri ed $n<m$. Sostituendo $m-1$ per m, $n-1$ per n e ripetendo la stessa operazione, nasce il sistema

$$x_{m,n}=mx_{m-1,n-1};\ x_{m-1,n-1}=(m-1)\,x_{m-2,n-2};$$

$$x_{m-2,n-2}=(m-2)x_{m-3,n-3};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{m-(n-2),2}=[m-(n-2)]\,x_{m-(n-1),1};$$

Nell'ordinato prodotto di quest'eq.[i] sopprimasi il fattor comune, ed avvertendo che

$x_{m-(n-1),1}$ è $=m-(n-1)$ si avrà

$$x_{m,n}=m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)][m-(n-1)]\ldots(n)$$

Se per es.° $m=10$ ed $n=6$ risulta

$$x_{n,n}=10.9.8.7.6.5.=151200.$$

Si ha pure $x_{n,n}=n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1\ldots..(o)$

Es.° 1.° Si dimandano le permutazioni nelle combinazioni ternarie di 4 elementi.

Le respettive classi sono

$$a\begin{Bmatrix}bc,\ bd,\ cd\\ cb,\ db,\ dc\end{Bmatrix},\quad b\begin{Bmatrix}ac,\ ad,\ cd\\ ca,\ da,\ dc\end{Bmatrix}$$

$$c \begin{Bmatrix} ab, ad, bd \\ ba, da, db \end{Bmatrix}, \quad d \begin{Bmatrix} ab, ac, bc \\ ba, ca, cb \end{Bmatrix}$$

e si ha $x_{4,3} = 4 x_{3,2}$; $x_{3,2} = 3 x_{2,1} = 3.2$; cioè

$$x_{4,3} = 4.3.2 = m(m-1)(m-2) = 24.$$

Es.° 2.° Quante sono le permutazioni binarie fra 4 elementi?

Si ha $x_{4,2} = 4 x_{3,1} = 4.3 = m(m-1) = 12$.

Infatti le classi corrispondenti sono

$a\{b,c,d\}$, $b\{a,c,d\}$, $c\{a,b,d\}$, $d\{a,b,c\}$

Es.° 3.° Gli elementi dati sono a,b,c,d,e e voglionsi le permutazioni ternarie.

La nota formola $x_{m,n} = m\, x_{m-1,n-1}$ dà $x_{5,3} = 5 x_{4,2}$:

ma (Es.° prec.) $x_{4,2} = 4 x_{3,1} = 4.3$. Dunque

$x_{5,3} = 5.4.3 = 60$. Infatti la 1.ª classe è

$$a \begin{Bmatrix} bc, db, eb, dc, ec, ed \\ cb, bd, be, cd, ce, de \end{Bmatrix}$$

Si ha la 2.ª permutando a in b e b in a: la 3.ª scrivendo a per c, c per a; ec. e tutte insieme danno $5.12 = 60$.

Se ciascun elemento può ripetersi, al n.° $m(m-1)$ $[= x_{m,2}]$ deesi aggiungere m, n.° de' quadrati a^2, b^2, ec. ed il n.° richiesto è $m(m-1) + m$ ossia m^2. Per passare nella stessa ipot. alle permutazioni ternarie basta collocare ciascuno degli m elementi ala destra di ciascuna permutazione binaria, e ciò produce

$m^2 . m$ ($= m^3$) permutazioni. Lo stesso metodo essendo applicabile alle permutazioni di qualunque ordine si può stabilire: che ripetendo ciascun elemento un n.° di volte non $> n$ si ha $x_{m,n} = m^n$ Così il n.° de' punti che può farsi gettando un dado 6 volte è $6^6 = 46656$.

* § 59. Il sistema delle combinazioni di m elementi presi n alla volta, dev'esser tale, che qualora si assortiscano in tutti i modi possibili gli elementi di ciascuna combinazione, ottengasi il n.° $x_{m,n}$. Ma ciascuna combinazione comprende n elementi, e le permutazioni fra questi sono date dalla formola (o). Dunque se il n.° delle combinazioni sopra indicate si rappresenta per $(x_{m,n})$ deesi avere

$$\{n(n-1)\ldots3.2.1\}(x_{m,n}) = x_{m,n}$$

cioè $$(x_{m,n}) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)][m-(n-1)]}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)n} \ldots(p)$$

Es.° 1.° Quale è il n.° degli ambi, de' terni, delle quaderne, delle cinquine, che possono formarsi coi 90 n.ⁱ del lotto?

$\frac{1}{2}$ 90.89 = 4005 .... n.° degli ambi

$\frac{1}{3}$ 4005.88 = 117480 .... n.° de' terni

$\frac{1}{4}$ 117480.87 = 2555190 .... n.° delle quaderne

$\frac{1}{5}$ 2555190.86 = 43949268 .... n.° delle cinquine

Es.° 2.° I punti che si posson fare gettando un dado tre volte sono 16, cioè 3, 4, 5 .... 18.

I casi possibili essendo $6^3 = 216$ alcuni de' 16 punti debbono succedere in più maniere, e siccome i punti 3, 18, corrispondono ciascuno ad un solo caso, e perciò presentano il minimo vantaggio a chi scommetta sul loro successo, sembra naturale che siavi qualche punto il quale dia per la scommessa un vantaggio massimo. Soddisfasi a tal ricerca costruendo una tavola i cui principj fondamentali sono: 1.° che due elementi eguali ed uno diverso, a, a, b, danno tre casi, cioè:

$$a, a, b; \ a, b, a; \ b, a, a.$$

2.° Che tre elementi diversi a, b, c, danno sei casi e sono le permutazioni possibili $m(m-1)(m-2)$.

Punti)	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Casi	1,1,1	2,1,1	3,1,1	4,1,1	5,1,1	6,1,1	6,2,1	6,3,1	6,4,1
	:	:	2,2,1	3,2,1	4,2,1	5,2,1	5,3,1	6,2,2	6,3,2
	:	:	:	2,2.2	3,3,1	4,3,1	5,2,2	5,4,1	5,4,2
	:	:	:	:	3,2,2	4,2,2	4,4,1	5,3,2	5,5,1
	1	3	6	10	:	3,3,2	4,3,2	4,4,2	5,3,3
					15	:	3,3,3	4,3,3	4,4,3
						21	:	:	:
							25	27	27

Siccome le 7 colonne che restano danno con ordine inverso gli stessi risultamenti i punti del massimo vantaggio esistono e sono 10, 11.

§. 60. La formola (p) serve di scorta per determinare tutti i divisori di un dato n.° . Trovato il minimo divisore (Tomo Supplement.°

Tav. II.) si divida per esso il n.° dato, si cerchi il minimo divisore del quoziente, ec. Ottenuti i divisori semplici si formino i loro prodotti binarj, ternarj ec. e si avranno i divisori composti. Sia per es.° 97983.

Min. divis. 3: quoz. 32661; min. divis. 3; quoz. 10887; min. divis. 3; quoz. 3629.

Min. divis. 19; quoz. 191 n.° primo. Dunque i divisori semplici sono 3, 3, 3, 19, 191; i divisori doppj 9, 57, 573, 3629; i divisori tripli 27, 171, 1719, 10887; i quadrupli 513, 5157, 32661.

Con maggior facilità si scuopre che i divisori del binomio $2ab^2 + 6a^2c$ sono $2, a, 2a, b^2 + 3ac, 2b^2 + 6ac, ab^2 + 3a^2c$.

Nell' ipot. che i divisori semplici sieno tutti diversi ed il loro n.° sia $= m$, il n.° totale de' divisori semplici e composti, non escludendo il prodotto di tutti i divisori semplici, dev'essere $= (1 + 1)^m - 1$. Questa verità è un corollario del seg.

Teor. Il n.° delle combinazioni di m elementi presi n alla volta coincide con quello delle combinazioni che si ottengono prendendo ogni volta un n.° $m - n$ di elementi. Dim.^{ne} Sostituendo nella formola (p) $m - n$ per n, e supponendo

$$(p) \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)} \ldots (q)$$

si scuopre che basta togliere i denominatori per avere le funzioni identiche

$1.2.3\ldots n(n+1)\ldots(m-1)m$

$1.2.3\ldots(m-n)(m-n+1)\ldots(m-1)m$. Dunque ec.

Ciascuna delle formole (p), (q) determina in quante maniere un n.° m di elementi si può dividere in due parti, cosicchè una ne contenga n, l'altra $m-n$. Infatti ad ogni combinazione compresa nella 1.ª formola necessariamente ne corrisponde una fra quelle della 2.ª.

Trattandosi di spartire 10 carte da gioco fra due persone, in modo che una ne abbia 7 l'altra 3, ciascuna delle anzidette formole insegna che il n.° de' casi possibili è $=\frac{10.\ 9.\ 8}{1.\ 2.\ 3.}=5.3.8=120.$

Per dividere m elementi in tre parti, una delle quali ne contenga n, l'altra $n_{,}$ si fa la divisione in due parti, una delle quali ne contenga n, l'altra $m-n$, poi si divide $m-n$ in due con la condizione che una parte contenga $n_{,}$ elementi.

La formola che soddisfa al quesito è

$$\frac{m.(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots.\ n}\ \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots[m-n-(n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n_{,}}$$

Le parti assegnate essendo n, $n_{,}$, $n_{,,}$, ec. si ha

$$\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots\ n}\cdot\frac{(m-n)\ldots[m-n-(n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots\ldots n_{,}}.\times$$
$$\frac{(m-n-n_{,})\ldots[m-n-n_{,}-(n_{,,}-1)]}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n_{,,}}\ \text{ec.}$$

In quanti modi le 52 carte del *Wisk* si possono egualmente spartire fra quattro giocatori?

Posto $m=52$, $n=n_{,}=n_{,,}=13$ la formola prec. dà

$$856\overset{4}{5}12619\overset{3}{7}85115\overset{2}{1}79786\overset{1}{1}440000$$

La stessa distribuzione delle carte del *tre-sette* può farsi in $9\overset{3}{2}99133\overset{2}{3}21562\overset{1}{7}121792$ maniere.

Or si vede che il n.° delle combinazioni degli ordini o, 1, 2, ... m, che possono formarsi con m elementi è

$$=m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\ldots+\frac{m(m-1)}{2}+m+1=(1+1)^m-1.$$

§. 61. Teor. Si ha $(x_{m+1,n})=(x_{m,n})+(x_{m,n-1})$.

Dim.ne Il 1.° membro moltiplicato per $1\,.\,2\,.\,3\ldots n$ è $=(m+1)\,m\ldots.[m+1-(n-1)]$; il 2.° moltiplicato come sopra risulta $=$ ad

$$m(m-1)\ldots.[m-(n-1)]+m(m-1)\ldots.[m-(n-2)]\,n,$$

cioè$=m(m-1)\ldots[m-(n-2)][m-(n-1)+n]=(m+1)m\ldots[m-(n-2)]$

funzione identica con $(m+1)m\ldots[m+1-(n-1)]$. Dunque ec.

§. 62. Fin qui si è supposto che gli elementi siano tutti diversi: se ciò non si verifica fa d' uopo rintracciare nuove formole, ed una tale indagine apparisce interessante, anche per riconoscere il n.° de' divisori di un dato n.° composto, quando alcuni suoi divisori semplici sono eguali, come nell' es.° addotto sul princ. del §. 60. La cognizione di cui si tratta serve ad assicurarci di non aver trascurato alcun divisore composto.

Abbiansi n elementi diversi, p elementi eguali ad uno de' prec.; perciò $m=n+p$. Gli elementi dati essendo per es.° a, a, a, b, c, si ha $n=3$, $p=2$. Ciò posto noi diciamo:

I. Che qualunque sia p, il n.° delle combinazioni binarie fra gli $n+p$ elementi è $= \frac{1}{2} n(n-1)+1$.

II. Che il n.° delle combinazioni ternarie è

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}+\begin{cases}(n-1) \text{ se } p=1 \\ n \quad \text{ se } p>1.\end{cases}$$

III. Che il n.° delle combinazioni quaternarie è

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}+\begin{cases}\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ se } p=1 \\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-1 \text{ se } p=2 \\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n \text{ se } p>2\end{cases}$$

Nell' es.° sul princ. del §. 60. si ha $n=3, p=2$ e però $m=5$; quindi $\frac{1}{2} n(n-1)+1=4$; la 2.ª formola è $=1+3$; la 3.ª $=1+2$. In tutto $5+4+4+3=16$.

Il n.° esprimente la somma de' prodotti diversi che possono formarsi fra m elementi $a, b, c, \ldots u$, presi uno, due, tre, ec. m alla volta è dato dalla formola

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ldots(1+u)-1$$

Mentre il n.° de' termini ottenuti mediante la successiva moltiplicazione, dà, togliendo uno, il n.° richiesto, l' aggregato de' termini stessi costituisce le combinazioni sopra indicate.

Se ciascun elemento può ripetersi fino ad n volte, alla formola (p) dee sostituirsi

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{2. \quad 3 \ldots n} \ldots \text{(r)}$$

CAPITOLO IV.

Teorica delle Potenze.

§. 63. Una funzione N^m, dove N può essere qualunque grandezza espressa in numeri, ed m si suppone un dato n.° intiero positivo, dicesi *potenza* m.^{esima} di N (45). Viceversa N dicesi *radice* m.^{esima} di N^m, ec. Si scrive per es.° $4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{16}$; $4 = \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64}$. In generale un n.° α che moltiplicato per se stesso una volta produce un n.° A è la radice quadrata di A; un n.° β che moltiplicato due volte per se stesso produce un n.° B è la radice cubica di B; ec.

Siccome moltiplicando $m-1$ volte per se stesso il prodotto $abc....$ si ha (44)

$$abc\text{ ec.} \times abc\text{ ec.} \times abc\text{ ec.} \times \text{ec.} = \overset{(m\,vol.)}{aaa\;.....} \times \overset{(m\,vol.)}{bbb\;.....} \times \overset{(m\,vol.)}{ccc\;.....} \times \text{ec.}$$
$$= a^m b^m c^m \text{ ec.},$$

per indicare $(a^p\, b^q\, c^r \text{ ec.})^m$ si può scrivere $a^{mp}\, b^{mq}\, c^{mr}$ ec.

Quindi è che in vece del simbolo $(i\,N^l)^m$, dove i si suppone un coefficiente numerico, si adotta quest' altro più preciso $i^m\, N^{lm}$.

Facciansi le potenze $(3a^2\, b^3)^2$, $(5a^3\, b^4\, c^5)^3$:

Per la stessa ragione si scrive

$$(i\,N^l)^{mm_{''}} \left[=\left((i\,N^l)^m\right)^{m_{''}} = (i^m\, N^{lm})^{m_{''}}\right] = i^{mm_{''}}\, N^{lmm_{''}};$$

e se $m_{\prime\prime} = \frac{1}{m_\prime}$, purchè la potenza fratta esprima un' operazione reale e non contradittoria a quella indicata dalla potenza intiera, del che in seg., l' analogia suggerisce la corrispondente indicazione

$$(i N^l)^{\frac{m}{m_\prime}} = i^{\frac{m}{m_\prime}} N^{l\frac{m}{m_\prime}}.$$

Se in vece di N abbiasi $\frac{N}{N_\prime}$ e si voglia $\left(\frac{iN^l}{N_\prime^{\,l}}\right)^m$ si opera separatamente su ciascuna delle quantità i, N^l, $N_\prime^{\,l_\prime}$, e si ottiene

$$\left(\frac{iN^l}{N_\prime^{\,l_\prime}}\right)^m = i^m \frac{N^{l,m}}{N_\prime^{\,l,m}}.$$

Così $\left(\frac{4a^3}{b^2}\right)^3 = 4^3 \frac{a^{3.3}}{b^{2.3}} = 64 \frac{a^9}{b^6}$.

§. 64. Se N sia un polinomio la formazione di N^m mediante l' operazione $N. N. N....$ (*m vol.*) diviene soverchiamente incomoda, ed esige il sussidio di qualche compendioso artifizio. L' analisi della potenza generica $(x+a)^m$, ch' è in certa guisa il germe d' ogni più complicata potenza, riesce per tale effetto esclusivamente opportuna e perciò noi passiamo ad occuparcene.

Lasciata da parte la successiva moltiplicazione d' $x+a$ per $x+a$, che fa dipendere i coefficienti numerici dalla riduzione de' termini simili, riduzione la cui legge, considerata in

astratto apparisce difficile (1), ci proponiamo di eludere l'oscura influenza delle riduzioni, ricavando nel tempo stesso i coefficienti numerici e le parti letterali d'$(x+a)^m$ dallo sviluppamento di $(x+a)(x+b)(x+c)$ ec. I più semplici fra i prodotti della forma indicata sono:

$$(x+a)(x+b)=x^2 \begin{array}{l}+a\\+b\end{array}\Big| x +ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3 \begin{array}{l}+a\\+b\\+c\end{array}\Bigg| x^2 \begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\Bigg| x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4 \begin{array}{l}+a\\+b\\+c\\+d\end{array}\Bigg| x^3 \begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\Bigg| x^2 \begin{array}{l}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\Bigg| x+abcd$$

e l'analogìa c' induce a concludere 1.° che qualunque sia il n.° de' fattori $x+a, x+b$, ec. i respettivi coefficienti delle successive potenze d'x ne' termini 2.°, 3.°, ec. equivalgono alla somma de' prodotti che si ottengono combinando uno alla volta, poi due, indi tre, ec. degli elementi a, b, c ec., dal che risulta che l' ultimo termine sia $= abc\ldots$

2.° Che posto il n.° de' fattori $= m$, i successivi termini del prodotto sono respettivamente affetti da $x^m, x^{m-1}, \ldots x^1, x^0$.

3.° Che nell' ipot. di $b=c=d$ ec. $=a$ il coefficiente d'x^{m-1} (nel 2.° term.) è ma; quello

(1) Si considerino gli esempj 1.° e 2.° del §. 46 che danno un' idea della riduzione, e fanno conoscere le parti ond' è composto il quadrato ed il cubo di un binomio.

d' x^{m-2} (nel 3.°) è (59) $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2$; quello d'$x^{m-3}$ (nel 4.°) $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3$ ec. In generale, che il coefficiente d'x^{m-n} (nel term $\overline{n+1}$.esimo) è (§. cit.)

$$\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}a^n.$$

L' espressione

$$t=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}a^n x^{m-n}.$$

dicesi *termine generale* perchè facendovi $n=0, 1, 2, \ldots m$, dà tutti i termini d' $(x+a)^m$, l' ultimo essendo $\frac{m(m-1)\ldots3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots(m-1)m}a^m x^{m-m}=a^m$

Così mediante una semplice e luminosa induzione siamo condotti al completo sviluppamento di $(x+a)^m$, cioè

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{l} x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}\ldots+ \\ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}a^n x^{m-n}+\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}\ldots+ \\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}x^3+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}x^2+\frac{m}{1}a^{m-1}x+a^m \end{array}\right.$$

È questa la così detta formola del *binomio* e formola *Newtoniana*.

Quindi apparisce che qualunque termine $(n+2)^{esimo}$ equivale al prec. moltiplicato per $\frac{(m-n)a}{(n+1)x}$, dove $m-n$ è l'esponente d'x nel termine prec. ed $n+1$ esprime il rango di detto termine. Il n.° de' termini è $=m+1$ perchè facendo $n=m+1$, $=m+2$, ec. risulta $t=0$.

Il coefficiente numerico del termine $n.^{esimo}$ dopo il 1.° equivale al n.° delle combinazioni di m elementi presi n alla volta; quello del termine $n.^{esimo}$ innanzi all' ultimo eguaglia il n.° delle combinazioni di $m-n$ elementi: ma (60) i predetti n.[i] sono eguali: dunque i coefficienti numerici de' termini equidistanti dagli estremi sono gli stessi: Due di essi riduconsi ad uno, ed è il termine medio, se $m=2p$: infatti $a^p\ x^{2p-p}$ è $=a^{2p-p}\ x^p$.

Cangiando x in 1 lo sviluppamento d' $(x+a)^m$ diviene

$$(2)\ldots\begin{cases}(1+a)^m=1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2\ldots+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}\ldots\\ \ldots+\frac{m}{1}a^{m-1}+a^m,\end{cases}$$

ed è una comoda formola che serve di norma in ogni caso.

Così $(\alpha\beta+\frac{\gamma\delta}{\varepsilon})^m$, dividendo e moltiplicando per $\alpha\beta$ il binomio dato, si cangia in

$(\alpha\beta)^m \left(1 + \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta\varepsilon}\right)^m$, e fatto $\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta\varepsilon} = a$ non si tratta che di sostituire in (2) il valore di a e moltiplicare ogni termine per $(\alpha\beta)^m$. Si sviluppi $(x + 2ab)^5$.

Sarebbe cosa facilissima liberare dall' induzione lo sviluppamento (1), dimostrando che s' egli si verifica per un determinato valore intiero $m_,$ di m, dee verificarsi altresì quando $m = m_, + 1$. Noi però di buon grado rinunziamo ad una dimostrazione parziale, limitata cioè all' ipot. di m intiero positivo, tanto più che la dimostrazione predetta dovrà in seg. da noi per incidenza riportarsi, e passiamo a rintracciare con un metodo unico, generale e rigoroso, lo sviluppamento di $(x + a)^m$ nelle quattro distinte ipotesi, che l' esponente m sia intiero o fratto, positivo o negativo.

§. 65. Lo sviluppamento di $(x + a)^{\frac{m}{m_,}}$, essendo $m, m_,$, n.[i] intieri e primi fra loro, qualora esista sotto una forma immune da ogni contradizione, dev' essere una funzione di a, x, ed $\frac{m}{m_,}$, perchè restando inalterate due di queste quantità, qualunque variazione della 3.[a] dee necessariamente influire nel risultamento. L'anzidetta funzione deve inoltre essere tale, che facendovi $m_, = 1$ coincida con lo sviluppamento d' $(x + a)^m$. Qualora dunque ci riesca di trovare la definitiva espressione d'$(x + a)^{\frac{m}{m_,}}$ noi avremo soddisfatto a due ipotesi, e se il

calcolo non soffra eccezione sostituendovi $-\frac{m}{m_{,}}$ il probl. sarà sciolto compiutamente.

Trasformato il binomio $a+x$ in $x(1+\frac{a}{x})$ se scrivesi z per $\frac{a}{x}$ tutto si riduce ad esprimere algebricamente il sistema delle parziali operazioni, che costituiscono quella, qualunque sia, che viene indicata per $(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}$. Il sistema di cui si tratta, moltiplicato per $(\frac{a}{z})^{\frac{m}{m_{,}}}$ rappresenta il richiesto sviluppamento di $(x+a)^{\frac{m}{m_{,}}}$.

Sia $(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}=1+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3 \ldots\ldots+a_n z^n \ldots$(3)

e però $(1+y)^{\frac{m}{m_{,}}}=1+a_1 y+a_2 y_2+a_3 y^3 \ldots\ldots+a_n y^n$,

dove a_1, a_2 ec. sono quantità numeriche da determinarsi.

Il 1.° termine si è posto $=1$ perchè fra i possibili valori di z vi è $z=0$ che rende il 1.° membro$=1$: si sono escluse le potenze fratte di z perchè queste sussisterebbero quando $m_{,}=1$ e quando $m=\mu m_{,}$, il che contraddice alla formola (1) del §. 64. La ragione per cui si prescinde dalle potenze negative di z è, che un solo termine az^{-p} darebbe nell' ipot. di $z=0$ l' eq. assurda $1=\infty$ (26) Avremo d' altronde una completa giustificazione della forma non meno che del reale significato della

serie (3) (*) se ci riesca di ottenere per a_n una formola immune da ogni contraddizione, poichè un calcolo legittimo non può somministrare i mezzi onde provare la rettitudine di un' ipot. erronea. Ciò posto si faccia per comodo

$$(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}} = \varphi^m,\ (1+y)^{\frac{m}{m_{,}}} = \psi^m :$$

quindi si deduca $\left[(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}\right]^{\frac{m_{,}}{m}} = (\varphi^m)^{\frac{m_{,}}{m}}$.

cioè $1+z=\varphi^{m_{,}}$ e però $1+y=\psi^{m_{,}}$.

La differenza dell' eq.[i] $\varphi^m = 1 + a_1 z$ ec.; $\psi^m = 1+a_1 y$ ec., eq.[i] identiche perchè il 2.° membro è per ipot. lo sviluppamento del 1.°, come $x^2+2ax+a^2$ lo è di $(x+a)^2$, dà l'eq. identica

$$\varphi^m-\psi^m = a_1(z-y)+a_2(z^2-y^2)\ldots+a_n(z^n-y^n),$$

la quale, dividendo il 1.° membro per $\varphi^{m_{,}}-\psi^{m_{,}}$, il 2.° pel binomio equivalente $z-y$, si cangia in

$$\frac{\varphi^m-\psi^m}{\varphi^{m_{,}}-\psi^{m_{,}}} = a_1 + a_2 \cdot \frac{z^2-y^2}{z-y} + a_3 \cdot \frac{z^3-y^3}{z-y} \ldots$$

$$\ldots + a_n \frac{z^n-y^n}{z-y}.$$

Avvertasi che $\frac{\varphi^m-\psi^m}{\varphi^{m_{,}}-\psi^{m_{,}}}$ è $= \frac{\varphi^m-\psi^m}{\varphi-\psi} : \frac{\varphi^{m_{,}}-\psi^m}{\varphi-\psi}$.

(*) È reale il significato di questa se le operazioni da cui ciascun suo termine dipende, possono in qualsivoglia caso pratico effettuarsi, cioè se non includono veruna incompatibilità coi principj dell' algoritmo algebrico.

e fatte le divisioni (49) si avrà

$$\frac{\phi^{m-1}+\phi^{m-2}\psi\ldots+\phi\psi^{m-2}+\psi^{m-1}}{\phi^{m_{,}-1}+\phi^{m_{,}-2}\psi\ldots+\phi\psi^{m_{,}-2}+\psi^{m_{,}-1}}=a_{1}+a_{2}(z+y)\ldots$$

$$\ldots+a_{3}(z^{2}+zy+y^{2})\ldots+a_{n}(z^{n-1}+z^{n-2}y\ldots$$

$$\ldots+zy^{n-2}+y^{n-1})$$

eq. che dee verificarsi identicamente qualunque sia il valore di z, y, e però anche nell'ipot. di $z=y$ cioè di $\phi=\psi$. Ma l'identità di ϕ con ψ e d'y con z cangia la prec. in

$$\frac{m\phi^{m-1}}{m_{,}\phi^{m_{,}-1}}=a_{1}+2a_{2}z+3a_{3}z^{2}\ldots+(n+1)a_{n+1}z^{n},$$

che moltiplicata per $\phi^{m_{,}}$, e posto il valore di ϕ^{m}, $\phi^{m_{,}}$, diviene

$$(4)\ldots\frac{m}{m_{,}}\left\{1+a_{1}z+a_{2}z^{2}\ldots+a_{n}z^{n}\right\}\ldots\ldots$$

$$\ldots=\left\{\begin{array}{l}a_{1}+2a_{2}z+3a_{3}z^{2}+4a_{4}z^{3}\ldots+\overline{n+1}\,a_{n+1}z^{n}\\ \quad+a_{1}z+2a_{2}z^{2}+3a_{3}z^{3}\ldots+na_{n}.z^{n}\end{array}\right.$$

e questa dev'essere identica, cioè della forma

$$\frac{m}{m_{,}}+\frac{m}{m_{,}}a_{1}z+\frac{m}{m_{,}}a_{2}z^{2}\text{ ec.}=\frac{m}{m_{,}}+\frac{m}{m_{,}}a_{1}z+\frac{m}{m_{,}}a_{2}z^{2}\text{ ec.}$$

$$\text{Dunque}\left\{a_{1}=\frac{m}{m_{,}},\ 2a_{2}+a_{1}=\frac{m}{m_{,}}a_{1},\ 3a_{3}+2a_{2}=\frac{m}{m_{,}}a_{2};\right.$$

$$4a_{4}+3a_{3}=\frac{m}{m_{,}}a_{3}\text{, ec.}\ldots\ldots$$

$$\left.(n+1)a_{n+1}+na_{n}=\frac{m}{m_{,}}a_{n}\right\}\ldots(5)$$

La 2.ª sostituendo $\frac{m}{m_{,}}$ per a_1 diviene

$$2a_2 + \frac{m}{m_{,}} = \frac{m^2}{m_{,}^2} \text{ e dà } a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m_{,}^2} - \frac{m}{m_{,}}\right);$$

La 3.ª, posto il valore di a_2 si riduce a

$$3a_3 + \frac{m^2}{m_{,}^2} - \frac{m}{m_{,}} = \frac{1}{2}\frac{m}{m_{,}}\left(\frac{m^2}{m_{,}^2} - \frac{m}{m_{,}}\right)$$

e somministra $a_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{m_{,}^2} - \frac{m}{m_{,}}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{m}{m_{,}} - 1\right)$; ec.

Dunque $a_1 = \frac{m}{m_{,}}$, $a_2 = \frac{1}{2}\frac{m}{m_{,}}\left(\frac{m}{m_{,}} - 1\right)$;

$$a_3 = \frac{1}{2.3}\frac{m}{m_{,}}\left(\frac{m}{m_{,}} - 1\right)\left(\frac{m}{m_{,}} - 2\right);$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2.3\ldots(n+1)}\frac{m}{m_{,}}\left(\frac{m}{m_{,}} - 1\right)\left(\frac{m}{m_{,}} - 2\right)\ldots\left(\frac{m}{m_{,}} - n\right)(=t)$$

Il calcolo essendo lo stesso quando si prende $\frac{m}{m_{,}}$ col segno $-$ si può concludere ec. Il rigore della dimostrazione dipende dalla certezza dell'ultima eq. (5): questa è una necessaria conseguenza della semplice ed inalterabile simmetria dell'eq. (4). Si può adesso stabilire 1.° che il risultamento dell'operazione indicata mediante il simbolo $(1+z)^{\frac{m}{n}}$ è reale: 2.° che le operazioni espresse coi simboli $(1+z)^{mn}$, $(1+z)^{\frac{m}{n}}$, non solo sono compatibili ma inoltre anche *correlative*, perchè una stessa formola

$$1 + \frac{m}{m_{,}}z + \frac{1}{2}\frac{m}{m_{,}}\left(\frac{m}{m_{,}} - 1\right)z^2 + \frac{1}{2.3}\frac{m}{m_{,}}\left(\frac{m}{m_{,}} - 1\right)\left(\frac{m}{m_{,}} - 2\right)z^3 \text{ ec.}$$

porge il risultamento di entrambe; basta sostituire mn per m, 1 per m, nel 1.° caso; n per m, nel 2.°. Il rapporto di correlazione può concepirsi in due altre maniere, cioè facendo $n=p^i$, poichè mutato il segno d'i si passa dall'uno all'altro simbolo; ed avvertendo che mentre la moltiplicazione di m per n determina il simbolo $(1+z)^m$ a rappresentare la potenza $(mn)^{esima}$ di $1+z$, la divisione di m per n dee condurre al risultamento inverso, vale a dire alla radice n.^{esima} di $(1+z)^m$.

* §. 66. Fra le dimostrazioni che della formola del binomio sono state addotte, si distingue per la sopraffina sua eleganza quella del sommo Geometra *Leonardo Euler* (Novi Comment. Acad. Petrop. T. XIX.) relativa alle potenze fratte.

Sia $(1+x)^m[=1+mx+\tfrac{1}{2}m(m-1)x^2 \text{ ec.}]=f(m)$

$$(1+x)^n[=1+nx+\tfrac{1}{2}n(n-1)x^2 \text{ ec.}]=f(n)$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

dove m, n, ec. sono n.^{i} intieri positivi: e perchè

$$(1+x)^m(1+x)^n(1+x)^p \text{ ec.}=(1+x)^{m+n+p \text{ ec.}}$$

si avrà $f(m)f(n)f(p)$ ec. $=f(m+n+p$ ec.$)$

Suppongasi $m=n=p$ ec. $=\frac{h}{k}$; si prenda un n.° k di fattori; e seguitando a rappresentare per f la nuova ignota funzione di $\frac{h}{k}$, che costituisce lo sviluppamento di $(1+x)^{\frac{h}{k}}$, si avrà (63)

$$f\left(\frac{h}{k}\right)f\left(\frac{h}{k}\right)f\left(\frac{h}{k}\right) \text{ ec.} = f\left(\frac{h}{k}+\frac{h}{k}+\frac{h}{k} \text{ ec.}\right) = f(h)$$

Dunque $\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^{h} = f(h) = (1+x)^{h}$

ed $(1+x)^{\frac{h}{k}} = f\left(\frac{h}{k}\right) = 1+\frac{h}{k}x + \frac{1}{2}\,\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)x^{2}$ ec.

Per rapporto alle potenze intiere positive altri ha proposta la seg. dimostrazione: Siccome

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^{n}(a+b) = (a^{n}+na^{n-1}b+\tfrac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^{2}\text{ ec.})(a+b)$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l|l} a^{n+1}+na^{n} & b+\tfrac{1}{2}n(n-1)a^{n-1} & b^{2} \text{ ec.} \\ \quad\;\; + a^{n} & + \quad\quad\quad na^{n-1} & \end{array}\right\} \ldots \text{(a)}$$

$$= a^{n+1}+(n+1)a^{n}b+\tfrac{1}{2}n(n+1)a^{n-1}b^{2}\text{ ec.}\} \ldots \text{(b)}$$

e quest' ultimo sviluppamento si ottiene sostituendo $n+1$ per n nella formola

$(a+b)^{n}=a^{n}+na^{n-1}b$ ec. che si sa esser vera quando $n=2,=3$, ec. ne segue che lo sviluppamento $a^{n}+na^{n-1}b$ ec. estendasi a qualunque valore intiero positivo di n, e però ec.

Per rendere concludente questa dimostrazione, d' altronde commendabile per la sua semplicità, noi passiamo a dimostrare identica la somma de' termini generali spettanti allo sviluppamento (a) cioè

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-n_{,})}{1.2.3\ldots(n_{,}+1)}+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots n_{,}}$$

col termine generale dello sviluppamento (b).

L' eq. $\frac{n(n-1)\ldots(n-n_{,})}{1.2.3\ldots(n_{,}+1)}+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots n_{,}}$

$\ldots=\frac{(n+1)n\ldots[n-(n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots(n_{,}+1)}$

qualora si moltiplichi per $1.2.3\ldots(n_{,}+1)$ si cangia in

$n(n-1)\ldots(n-n_{,})+n(n-1)\ldots[n-(n_{,}-1)](n_{,}+1)=\ldots$
$\ldots(n+1)n(n-1)\ldots[n-(n_{,}-1)]$;

ma questa divisa per $n(n-1)\ldots[n-(n_{,}-1)]$ si riduce ad

$n-n_{,}+n_{,}+1=n+1$ ossia $n+1=n+1$: dunque ec.

Noi avremmo desiderato che l' Autore dell' esposta dimostrazione avesse risparmiato un ingiusto rimprovero ai moderni Scrittori di elementi algebrici, alcuni de' quali, segnatamente *Lacroix*, l'hanno plausibilmente dimostrata.

Ci asteniamo dal notare i difetti di varie altre dimostrazioni, perchè in seg. delle osservazioni prec. non è difficile ravvisarli.

* §. 67. Teor. 1.° Nella formola del binomio la somma de' coefficienti de' termini di sito pari eguaglia quella de' coefficienti di sito dispari. Dim.ne I termini $(2n)^{esimo}$, $(2n+1)^{esimo}$ dello sviluppamento

$$1+\frac{m-1}{1}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\text{ec.}=(1+1)^{m-1}\left[=\frac{(1+1)^{m}}{2}\right]$$

sono $\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(2n-1)]}{1.2.3\ldots\ldots(2n-1)} (=t)$,

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-2n)}{1.2.3\ldots\ldots 2n} \left(=\frac{m-2n}{2n} t\right)$$

Il termine $(2n+1)^{esimo}$ dello sviluppamento

$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}$ ec. $=(1+1)^m$ è $\frac{m(m-1)\ldots[m-(2n-1)]}{1.2.3\ldots 2n} \left(=\frac{m}{2n} t\right)$

Ma $t+\frac{m-2n}{2n} t=\frac{m}{2n} t$. Dunque il 2.° ed il 3.° termine di $(1+1)^{m-1}$ equivale al 3.° di $(1+1)^m$; il 4.° ed il 5.° di $(1+1)^{m-1}$ equivale al 5.° di $(1+1)^m$, ec. e però si ha

$$(1+1)^{m-1}=1+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \text{ec.}$$

Sia s_1 la somma de' termini di sito dispari, s_2 quella de' termini di sito pari, spettanti ad $(1+1)^m$. Siccome si è veduto essere $(1+1)^{m-1} = s_1$; d'altronde $(1+1)^{m-1} = \frac{1}{2}(1+1)^m$, e lo sviluppamento di $(1+1)^m$ equivale ad $s_1 + s_2$, risulta $s_1 = \frac{1}{2}(s_1+s_2)$ cioè $s_1 = s_2$. Ma i termini di $(1+1)^m$ sono i coefficienti d' $(x+a)^m$. Dunque ec.

§. 68. Teor. 2° Essendo $m, n; m_{,}, n_{,}$, n.i respettivamente primi si ha

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{m_{,}}{n_{,}}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m_{,}}{n_{,}}} \ldots (6)$$

Dim.ne Ridotto il n.° a alla forma $\alpha+\beta$ deducasi

$$(\alpha+\beta)^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\alpha^{\frac{m-1}{n}}\beta + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha^{\frac{m-2}{n}}\beta^2 \text{ ec.}$$

$$(\alpha+\beta)^{\frac{m_,}{n_,}} = \alpha^{\frac{m_,}{n_,}} + \frac{m_,}{n_,}\alpha^{\frac{m_,-1}{n_,}}\beta + \frac{1}{2}\frac{m_,}{n_,}\left(\frac{m_,}{n_,}-1\right)\alpha^{\frac{m_,-2}{n_,}}\beta^2 \text{ ec.}$$

$$(\alpha+\beta)^{\frac{m}{n}}(\alpha+\beta)^{\frac{m_,}{n_,}} = \alpha^{\frac{m}{n}}.\alpha^{\frac{m_,}{n_,}} + \frac{m}{n}\alpha^{\frac{m-1}{n}}\alpha^{\frac{m_,}{n_,}}\beta + \frac{m}{n}.\frac{m_,}{n_,}\alpha^{\frac{m-1}{n}}\alpha^{\frac{m_,-1}{n_,}}\beta^2 \text{ ec.}$$

$$+\frac{m_,}{n_,}\alpha^{\frac{m_,-1}{n_,}}\alpha^{\frac{m}{n}}\beta + \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha^{\frac{m}{n}-2}\alpha^{\frac{m_,}{n_,}}\beta^2 \text{ ec.}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m_,}{n_,}\left(\frac{m_,}{n_,}-1\right)\alpha^{\frac{m_,-2}{n_,}}\alpha^{\frac{m}{n}}\beta^2 \text{ ec.}$$

$$(\alpha+\beta)^{\frac{m}{n}+\frac{m_,}{n_,}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{m_,}{n_,}} + \left(\frac{m}{n}+\frac{m_,}{n_,}\right)\alpha^{\frac{m}{n}+\frac{m_,-1}{n_,}}\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{m_,}{n_,}\right)\left(\frac{m}{n}+\frac{m_,}{n_,}-1\right)\alpha^{\frac{m}{n}+\frac{m_,-2}{n_,}}\beta^2 \text{ ec.}$$

Supponendo l'eq. (6) e però $\alpha^{\frac{m-1}{n}}\alpha^{\frac{m_,}{n_,}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{m_,-1}{n_,}}$, ec. il 3.° sviluppamento si cangia nel 4.° Ma l'ipot. (6) non può trasformare uno sviluppamento legittimo in un altro egualmente legittimo senza che tale sia l'ipot. stessa. Dunque l'eq. (6) è vera.

§. 69. Teor. 3.° Essendo m, n n.i intieri, e per maggiore semplicità primi fra loro, è $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Dim.ne Abbiamo

$$a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{m}{n}}\dots(n\ vol.) = a^{\frac{m+m\dots(n\ vol.)}{n}} = a^m.$$

Ma anche $\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^m}\dots(n\ vol.)$ ossia $(\sqrt[n]{m})^n$ è $= a^m$, altrimenti l'effetto di due operazioni contrarie sulla medesima quantità non si eliderebbe; ed il prodotto di n fattori eguali

α, α..., non può equivalere al prodotto di n fattori eguali β, β,... senza che sia $\beta = \alpha$. Dunque ec.

Un moderno Autore, ridotti gli esponenti al medesimo denominatore, speditamente deduce

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{m_{\prime}}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{m_{\prime}}} = \sqrt[n]{a^m . a^{m_{\prime}}} = \sqrt[n]{a^{m+m_{\prime}}} = a^{\frac{m+m_{\prime}}{n}},$$

ma la conseguenza è precaria perchè la 2.ª trasformazione vien da lui gratuitamente supposta.

La ragione che *Bossut* desume dall'indole delle operazioni inverse $m.n$; $\frac{m}{n}$ (65 sul fine) è un argomento metafisico che concilia una veemente probabilità, non una dimostrazione analitica che seco porti la convizione.

Il simbolo $a^{\frac{m}{n}}$, così *Francoeur*, non ha per se stesso alcun significato: dunque si può destinare ad esprimere $\sqrt[n]{a^m}$: *in questa guisa le formole convengono a tutti i casi, che m sia o non sia multiplo di* n, *il che si accorda col genio dell'algebra*. Noi rispondiamo 1.° che $a^{\frac{m}{n}}$ ha un significato non equivoco, dipendente dal rapporto che dee sussistere tra i risultamenti delle operazioni inverse a^{mn}, $a^{\frac{m}{n}}$. 2.° che l'equivalenza de' simboli $a^{\frac{m}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m}$, lungi dall' essere un subbietto convenzionale

destinato a salvare l'analogìa dell' algoritmo, è anzi necessaria conseguenza di un principio dell'algoritmo stesso, contenuto nell'eq. (6): 3.° che gli argomenti tratti dalla convenienza e dall' analogìa troppo sono imperfetti e manchevoli, ove trattisi di stabilire su di essi le verità fondamentali di una scienza esatta.

§. 70. Mediante la formola del binomio facilmente si ottiene l'espressione di $(a+b+c+u+v)^m$ nella respettiva ipot. di $m=2,3,4$ Sostituito $b+c$ per b in

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

indi in $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

respettivamente si ritrae

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc),$$

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(n+b)+6abc$$

Si osservino i risultamenti che nascono dalla successiva sostituzione di $c+d$ per c, di $d+e$ per d nelle formole prec. e si concluderà essere

$$\text{I.}\ (a+b+c\ldots+u+v)^2=a^2+b^2+c^2\ldots+u^2+v^2$$
$$+2(ab+ac\ldots+au+av)$$
$$+2(bc+bd\ldots+bu+bv)$$
ec. ec.

dove i termini dentro le sgraffe sono i prodotti a due per due di $a, b, c, \ldots u, v$ (1).

(1) È notabile la seg. proprietà del quadrato [111 ... (m vol.)]^2, cioè che qualora sia m una cifra non >9 si ha

[111 ... (m vol.)]^2 = 1.2.3 ... m ... 321.

Qualunque sia m, risulta dalla natura dell' operazione [111 ...]^2 che le prime cifre del risultamento sono per ordine 1, 2, 3, 4 ...

$$
\begin{aligned}
\text{II. } (a+b+c....+u+v)^3 = {} & a^3+b^3+c^3....+u^3+v^3 \\
& +3a^2(b+c....+u+v) \\
& +3b^2(a+c....+u+v) \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& +3u^2(a+b....+t+v) \\
& +3v^2(a+b....+t+u) \\
& +2.3(abc+abd...+abv+bcd...+bcv...+tuv)
\end{aligned}
$$

dove la funzione moltiplicata per 2 . 3 è la somma de' prodotti a tre per tre di $a,b,c....u,v$.

* Un' operazione analoga dà

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^4 = {} & a^4+b^4+c^4 \\
& +4a^3(b+c)+4b^3(a+c)+4c^3(a+b) \\
& +6a^2(b^2+c^2)+6b^2c^2 \\
& +12(a^2bc+b^2ac+c^2ab)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d)^4 = {} & a^4+b^4+c^4+d^4 \\
& +4a^3(b+c+d)+4b^3(a+c+d) \\
& +4c^3(a+b+d)+4d^3(a+b+c) \\
& +6a^2(b^2+c^2+d^2)+6b^2(c^2+d^2)+6c^2d^2 \\
& +12a^2(bc+bd+cd)+12b^2(ac+ad+cd) \\
& +12c^2(ab+ad+bd)+12d^2(ab+ac+bc) \\
& +2.3.4\,abcd\,;
\end{aligned}
$$

ed in generale

$$
\begin{aligned}
\text{III. } (a+b+c...+u+v)^4 = {} & a^4+b^4+c^4...+u^4+v^4 \\
& +4a^3(b+c...+u+v) \\
& +4b^3(a+c...+u+v) \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& +4u^3(a+b....+t+v) \\
& +4v^3(a+b...+t+u) \\
& +6a^2(b^2+c^2...+u^2+v^2) \\
& +6b^2(c^2+d^2...+u^2+v^2) \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& +6t^2(u^2+v^2)+6u^2v^2 \\
& +12a^2(bc+bd...+tu+uv) \\
& +12b^2(ac+ad...+tu+uv) \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& +12u^2(ab+ac...+sv+tv) \\
& +12v^2(ab+ac...+su+tu) \\
& +2.3.4\,(abcd+abce...+abuv...+stuv)
\end{aligned}
$$

Il seg. metodo, più elegante che utile, fa dipendere lo sviluppamento di

$$(a+bx+cx^2\ldots+vx^m)^n,$$

e perciò anche quello della formola

$$(a+b+c\ldots+v)^n$$

in cui la prec. si cangia facendo $x=1$, da un sistema di eq.[i], sottoposte ad una legge notabile per la sua semplicità.

* §. 71. Facendo

$$(a+bx\ldots+vx^m)^n=A+Bx\ldots+Vx^m$$

perciò $(a+by\ldots+vy^m)^n=A+By\ldots+Vy^m$

e quindi $a+bx$ ec. $=\Phi$, $a+by$ ec. $=\psi$, risulta

$$\frac{\Phi^n-\psi^n}{\Phi-\psi}=\frac{B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)\text{ec.}}{b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)\text{ ec.}}$$

$$=\frac{B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)\text{ ec.}}{b+c(x+y)+d(x^2+xy+y^2)\text{ ec.}}$$

Ma con supporre $y=x$ si ha $\psi=\Phi$ (49),

$\frac{\Phi^n-\psi^n}{\Phi-\psi}=n\,\Phi^{n-1}$ e l'eq. prec. si cangia in

$$n(a+bx\ldots+ux^m)^{n-1}=\frac{B+2Cx+3Dx^2+\text{ ec.}}{b+2cx+3dx^2+\text{ ec.}}$$

Dunque perchè

$$(a+bx\text{ec.})^{n-1}=\frac{(a+bx\text{ ec.})^n}{a+bx\text{ ec.}}=(\text{ipot.})\,\frac{A+Bx\text{ ec.}}{a+bx\text{ ec.}}$$

si ha

$$\frac{n(A+Bx\text{ ec.})}{a+bx\text{ ec}}=\frac{B+2Cx+3Dx^2\text{ ec.}}{b+2cx+3dx^2\text{ ec.}}$$

e tolti i denominatori

$$n(A+Bx+Cx^2\text{ ec.})\,(b+2cx+3dx^2\text{ ec.})=$$

$$(B+2Cx+3Dx^2\text{ ec.})\,(a+bx+cx^2\text{ ec.})$$

eq. il cui sviluppamento,

$$\left.\begin{array}{r|r|r|l} nbA+\;nbB & x+\;nbC & x^2+\;nbD & x^3+\text{ec.}\\ +2ncA & +2ncB & +2ncC & \\ & +3ndA & +3ndB & \\ & & +4neA & \end{array}\right\}=$$

$$\begin{array}{r|r|r|l} aB+2aC & x+3aD & x^2+4aE & x^3+\text{ec.}\\ +\;bB & +2bC & +3bD & \\ & +\;cB & +2cC & \\ & & +\;dB & \end{array}$$

attesa l'identità che dee sussistere fra i due membri, somministra come nel §. 65.

$aB=nbA$, dove $A=a^n$, valore dato dall' ipot. $x=0$;

$$2aC=(n-1)bB+2ncA,.$$

$$3aD=(n-2)bC+(2n-1)cB+3ndA,$$

$$4aE=(n-3)bD+(2n-2)cC+(3n-1)dB+4neA,$$

. . . .

$$maV=[n-(m-1)]bU+[2n-(m-2)]cT+[3n-(m-3)]dS\ldots.$$

$$+[(m-1)n-1]uB+mnvA.$$

Ricavando dalle prec. eq.[i] l'espressione di *B*, *C*, ec. si ottiene la così detta *formola di Moivre*, formola il cui sviluppamento si rende operoso e difficile a misura che s' inoltra, e che non riesce di alcun vantaggio se non venga notabilmente inoltrata. Volendosi per es.[o] ch' ella possa servire alla formazione della potenza 6.[a] di un sestinomio, sono necessarj 37 termini nella sola 1.[a] linea orizzontale del suo sviluppamento.

Nel Capit. de' Logaritmi daremo una semplice formola che direttamente conduce all'espressione delle potenze

$$(a+b+c\ldots+v)^m,\ (a+bx+cx^2\ldots+vx^n)^m,$$

e stabilisce nel tempo stesso l'induzione da cui dipendono gli sviluppamenti esposti sotto i n.[i] I, II, III, del §. antec.

§. 72. Siccome la valutazione delle formole finali da cui la soluzione dipende di un dato probl., costituisce il compimento della soluzione stessa, la teorica delle potenze sarebbe sostanzialmente manchevole, se limitandosi alle operazioni letterali, che altro poi non sono se non che parziali indicazioni simboliche, niuna norma porgesse per abbreviare il calcolo delle potenze numeriche il cui ordine sia molto elevato, ovvero appartengano ad un n.[o] molto grande. Il metodo della successiva moltiplicazione è ne' casi onde si tratta così lungo e fastidioso, attesa la moltiplicità delle uniformi operazioni; è così fallace ed equivoco

attesi gli errori di computo cui va sottoposto, che niun calcolatore può mai profittarne senza grave rincrescimento. Per questo noi ci siamo risoluti di pubblicare alcuni ripieghi analitici, c'altri ha creduti opportuni e che noi non disapproviamo, perchè ogni più diretto e completo metodo debbe a parziali tentativi talvolta i suoi primi elementi, spesso qualche utile traccia, sempre un benefico eccitamento.

Attesa l'equivalenza de' simboli a^{2m}, $(a^2)^m$, ciascun de' quali indica un prodotto ove a è fattrice $2m$ volte, se $m=2p$, deducasi

$$a^{2m}=(a^2)^m=(a^2)^{2p}=(a^4)^p:$$

Se $m=2p+1$, si deduca

$$a^{2m}=(a^2)^{2p+1}=a(a^2)^{2p}=a(a^4)^p.$$

Riducasi p ad una delle forme $2q$, $2q+1$ e proseguendo si otterrà speditamente la potenza a^{2m} e quindi anche a^{2m+1}.

Es.° 1.° $2^{30}=(2^2)^{15}=4.4^{14}=4(4^2)^7=4.4^2(4^2)^6$
$=64(16)^6=64(16^2)^3=64(256)^3=64.256(256)^2$
$=16384.65536=1073741824$.

Es.° 2.° $2^{64}=4^{32}=16^{16}=(\overline{16}^2)^8=(256)^8=(\overline{256}^2)^4$
$=(65536)^4=(\overline{65536}^2)^2=(4294967296)^2$
$=18446744083709551616$.

Es.° 3.° Si ha $3^{19} = 3.3^{18} = 3.9^9 = 3.9.9^8 = 27.\overline{81}^4 = 27(\overline{81}^2)^2 = 27(6561)^2 = 27.43046721 =$ 1162261467.

Se il n.° è composto si fa la potenza de' n.i primi componenti, indi il prodotto di esse. Così $\overline{42}^8 = 2^8.3^8.7^8 = 256.6561.5764801 = 9582552198416$.

§. 73. Per formare una potenza intiera negativa di 2 cioè 2^{-m}, si osservi 1.° che si ha

$2^{-1} = 0{,}5$; $2^{-2} = 0{,}25$; $2^{-3} = 0{,}125$; $2^{-4} = 0{,}0625$;

$2^{-5} = 0{,}03125$. 2.° che le ultime tre cifre sono sempre alternativamente 125, 625: 3.° che il n.° totale delle cifre eguaglia quello delle unità contenute nell'esponente: 4.° che le cifre anteriori al periodo finale (125 ovv. 625) si ottiene moltiplicando per 5 il n.° che precede il periodo suddetto nella espressione della potenza prossimamente minore, con l'avvertenza di aggiunger 3 al prodotto se l'ordine della potenza richiesta è dispari. Si ha per es.°

$2^{-6} = 0{,}015625$ e 15 è $= 3 \times 5$;

$2^{-7} = 0{,}0078125$ e 78 è $= 15 \times 5 + 3$; ec.

Per avere 4^{-m} basta calcolare 2^{-2m}.

La potenza 5^{-m} è $= 0{,}000\ldots\ldots 2^m$, dove il n.° degli zeri è $= \frac{2}{3}m$, tanto se il quoziente sia esatto

quanto se dia il residuo 1; è $= \frac{2}{3} m + 1$ se il residuo suddetto sia $= 2$. Così

$$5^{-24} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 02^{24},$$

e perchè $2^{24} = 4^{12} = \overline{16}^{6} = (\overline{16}^{2})^{3} = (256)^{3} = 256 \times 65536 = 16777216$ risulta ec. Si ha pure $25^{-m} = 5^{-2m}$.

§. 74. Il metodo che passiamo a proporre per agevolare la formazione delle basse potenze de' grandi n.[i], è quello stesso di cui ci siamo serviti per ampliare speditamente la tavola delle potenze, calcolata ed aggiunta alle lezioni Matematiche dell' Ab. *Marie* ediz. 5.[a] dai benemeriti Prof.[ri] Geometri i PP. Scolopj *Canovai* e *Del Ricco*. La nuova tavola delle potenze, che pubblicheremo con parecchie altre in un tomo addizionale al Calcolo algebrico, ed il metodo di compendio con cui è costruita, e che può servire a protrarla indefinitamente, suppliranno agli ordinarj bisogni del calcolo. Si scrivano per ordine i quadrati 1^2, 2^2, 3^2, ec.; sotto ciascun n.° si noti la differenza tra esso ed il consecutivo e si avrà

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \ldots\ldots n^2, \quad (n+1)^2 \\ 3,\ 5,\ 7,\ \ 9,\ 11,\ 13 \ldots\ldots 1+2n, \\ 2,\ 2,\ \text{ec.} \end{array}\right\}$$

dove le formole n^2, $1+2n$, sono per rapporto ai n.[i] delle respettive linee 1.[a] e 2.[a], ciò che il termine generale t è per rapporto a' termini che compongono lo sviluppamento di $(x+a)^m$ (64).

Siccome il n.° n.^{esimo} n^2 aggiunto al n.° sottoposto forma il n.° $(n+1)^{esimo}$ della 1.ª linea, cioè $(n+1)^2$, per continuare la tavola de' quadrati basta sostituire per n in $1+2n$ il n.° ch'esprime il rango dell' ultimo quadrato ed aggiungere il risultamento all'ultimo quadrato suddetto. Partendo per es.° da 4000000 ($=\overline{2000}^2$) ultimo quadrato della tavola sopra citata, si fa $n=2000$, si deduce $1+2n=4001$ e la somma

$$\left.\begin{array}{r} 4000000 \\ +\quad 4001 \end{array}\right\} = 4004001 \text{ è} = (2001)^2$$

Il quadrato seg. si forma subito aggiungendo la differenza costante $d_2=2$ a 4001 ed effettuando l'addizione

$$\left.\begin{array}{r} 4004001 \\ +\quad 4003 \end{array}\right\} = 4008004 (=\overline{2002}^2) \text{ e così ec.}$$

Si costruisca per li cubi 1^3, 2^3, 3^3, ec. il sistema analogo

$$\left\{\begin{array}{llllll} 1, & 8, & 27, & 64, & 125 \ldots\ldots n^3, & (n+1)^3 \\ 7 & 19 & 37 & 61 & \ldots\ldots & 3(n^2+n)+1 \\ 12 & 18 & 24 & 30 & \ldots\ldots & 6(1+n) \\ 6, & 6 & & & & \end{array}\right\}$$

Qualunque n.° della 1.ª linea equivale alla somma del prec. e del n.° sottoposto al prec. stesso: per es.° $64=27+37$; $125=64+61$, ec. In generale $n^3+3(n^2+n)+1=(n+1)^3$.

Scritte le prime tre colonne nulla manca per continuare il sistema, ed il conseguimento

di un nuovo cubo non dipende che dalla somma di due n.[i] . Si ha per es.°

$$64=27+37,\ 61=37+24,\ 30=24+6.$$

La giunta della differenza costante $d_3=6(=2.3)$ non può riguardarsi come un' operazione. Supponendo per es.° di aver costruita la tavola sino a $(1999)^3$, penultimo cubo della tav. cit., si determina il sottoposto n.° della 2.ª linea sostituendo 1999 per n in $3(n^2+n)+1$, e più speditamente con prendere la differenza de' n.[i] cogniti $(2000)^3$, $(1999)^3$, e si ha 11994001. Il 2.° n.° sottoposto della 3.ª linea è

$$6(1+n)=6(1+1999)=12000.$$

Ecco il prospetto dell' operazione.

	$(1999)^3$		$(2000)^3$		$(2001)^3$
(1)	7988005999	(3)	8000000000		8012006001 ec.
+	11994001	(2)	12006001	(4)	12018007
	12000		12006		12012

La somma (1) dà il cubo $(2000)^3=8000000000$; la somma (2) il n.° sottoposto 12006001; il 2.° n.° sottoposto 12006 equivale al 3.° n.° antec. $12000+d_3$ $(=6)$. Nella stessa guisa la somma (3) produce il cubo $(2001)^3=8012006001$; la somma (4) dà il sottoposto n.° 12018007; il 3.° n.° è 12006+6; ec.

Il sistema per le potenze quarte di 1, 2, 3, ec. è

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ 16,\ 81,\ 256,\ 625,\ 1296\ldots\ldots n^4 \\ 15,\ 65,\ 175,\ 369,\ 671,\ \ldots\ldots \\ 50,\ 110,\ 194,\ 302,\ 434,\ \ldots\ldots \\ 60,\ 84,\ 108,\ 132,\ \ldots\ldots, \\ 24,\ 24,\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si ha per es.° 6^4 (=1296) = 625 + 671 dove 671 = 369 + 302, e 302 = 194 + 108; essendo 108 = 84 + d_4 (= 2.3.4). Così bastano tre somme semplici in vece di tre moltiplicazioni complesse e di tre somme consimili. Il metodo è generale per le potenze di qualunque grado. Pel grado n.esimo la differenza costante è $d_n = 2.3.4 \ldots n$.

Cercandosi $(25987)^4$ deducasi dalla tavola de' minimi divisori 25987 = 13×1999 e si avrà

$$(25987)^4 = 13^4 (1999)^4 = 28561 \times 15968023992001 = 456062733235540561.$$

§. 75. Avendo così soddisfatto alla formazione delle potenze, ragion vuole che profittiamo delle anteposte nozioni, e specialmente del §. 69, per dichiarare le regole da cui dipende il calcolo delle quantità *radicali*, di quelle cioè che sono affette da uno o più segni $\sqrt[m]{}$, $\sqrt[n]{}$, ec. vale a dire da una o più potenze fratte.

Diconsi radicali *semplici* quelli della forma $\sqrt[m]{P}$, nell' ipot. che P sia un polinomio razionale; *misti* qualora sieno della forma $A \pm \sqrt[m]{B} \pm \sqrt[n]{C}$ ec.; *universali* come $\sqrt[p]{(A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[n]{C} \text{ ec.})}$. Sì gli uni che gli altri diconsi *reali* se l'estrazione delle radici non soggiace a contradizione, *immaginarj* s'ella è impossibile. La formola di questi è $\sqrt[2m]{-N}$.

In fatti se esistesse un n.° $\pm x = \sqrt[2m]{-N}$, dovrebb' essere $(\pm x)^{2m} = (\sqrt[2m]{-N})^{2m} = -N$. Ma la potenza pari $2m$ di $\pm x$ si forma moltiplicando per se stesso il n.° $\pm x$ un n.° di volte $= 2m-1$, ed una tal moltiplicazione dà sempre il prodotto positivo, giacchè

$$-x\times-x=+x^2\,;-x\times-x\times-x\times-x=+x^4\text{,ec.ec.}$$

La formola $\sqrt[2m]{-N}$ equivale a $\sqrt[2m]{(N\times-1)} = \sqrt[2m]{N}\sqrt[2m]{-1}$, e questa si riduce alla forma $B\sqrt[2m]{-1} = B\sqrt{\sqrt[m]{-1}}$.

Un radicale si rende più semplice portando fuori del segno que' fattori che sieno potenze *dell' ordine costituito* dall'*indice* del segno stesso. Così $\sqrt[m]{(a^m b^2 c + a^m d^3 e)}$ è $= a\sqrt[m]{(b^2 c + d^3 . e)}$.

Si ha pure

$$\sqrt[4]{(a+b)^6} = \sqrt[4]{[(a+b)^4 (a+b)^2]} = (a+b)\sqrt[4]{(a+b)^2} = (a+b)\sqrt{(a+b)}.$$

Es.° di somma ... $\sqrt{a^2 b} + \sqrt{a^4 b} = (a+a^2)\sqrt{b}$.

Es.° di sottraz. .... $\sqrt{a^2 b} - \sqrt[3]{a^3 c^2} = a(\sqrt{b} - \sqrt[3]{c^2})$.

Per moltiplicare o dividere $\sqrt[m]{A^p}$ per $\sqrt[n]{B^q}$, dove A, B possono essere polinomj, si deduce

$A^{\frac{p}{m}}, B^{\frac{q}{n}}$: quindi (50) $A^{\frac{np}{mn}}, B^{\frac{mq}{mn}}$ ossia $\sqrt[mn]{A^{np}}, \sqrt[mn]{B^{mq}}$.

e si ha

$$\sqrt[m]{A^p} \times \sqrt[n]{B^q} = \sqrt[mn]{(A^{np}.B^{mq})}; \frac{\sqrt[m]{A^p}}{\sqrt[n]{B^q}} = \sqrt[mn]{\frac{A^{np}}{B^{mq}}} .$$

Es.° di moltipl.^{ne} ...

$$2\sqrt{a+b} \times 5\sqrt[3]{a-b} = 2\sqrt[6]{(a+b)^3} \times 5\sqrt[6]{(a-b)^2}$$

$$= 10\sqrt[6]{(a+b)^3 (a-b)^2} .$$

Es.° di divis.^{ne}....

$$15\sqrt{p} : 3\sqrt[3]{q} = 15\sqrt[6]{p^3} : 3\sqrt[6]{q^2} = 5\sqrt[6]{\frac{p^3}{q^2}} .$$

Si ha pure

$$(\sqrt[m]{A^p})^q = \sqrt[m]{A^{pq}}, \text{e se } pq = m, \sqrt[m]{A^m} = A^{\frac{m}{m}} = A .$$

Se i radicali sono misti come

$$a + 2\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} ; 4a - 3\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b} ,$$

si riducono alla forma

$$a + 2\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2} , 4a - 3\sqrt[6]{a^3} + 2\sqrt[6]{b^2}$$

e si procede al solito

Es.°

$$a + 2\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}$$
$$4a - 3\sqrt[6]{a^3} + 2\sqrt[6]{b^2}$$

$$4a^2 + 8a\sqrt[6]{a^3} + 4a\sqrt[6]{b^2}$$
$$-3a\sqrt[6]{a^3} \qquad -6\sqrt[6]{a^6} - 3\sqrt[6]{a^3b^2}$$
$$+2a\sqrt[6]{b^2} \qquad +4\sqrt[6]{a^3b^2} + 2\sqrt[6]{b^4}$$

Prod.to
$$4a^2 + 5a\sqrt[6]{a^3} + 6a\sqrt[6]{b^2} - 6\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[6]{a^3b^2} + 2\sqrt[6]{b^4}$$

ossia
$$4a^2 + 5a\sqrt{a} + 6a\sqrt[3]{b} - 6a + \sqrt[6]{a^3b^2} + 2\sqrt[3]{b^2}\ .$$

Trattandosi di dividere $6a - \sqrt[6]{a^3b^2} - 12\sqrt[3]{b^2}$ per $2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b}$ fa d' uopo ridurre il 2.° termine del dividendo alla forma $-\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$.

Es.° Divis.re Divid.do Quoz.te

$$2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b})\ ...6a - \sqrt{a}\sqrt[3]{b} - 12\sqrt[3]{b^2}\ (3\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b}$$
$$6a - 9\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$$
$$8\sqrt{a}\sqrt[3]{b} - 12\sqrt[3]{b^2}$$
$$8\sqrt{a}\sqrt[3]{b} - 12\sqrt[3]{b^2}$$
$$0 \qquad 0$$

§. 76 Notisi per rapporto ai radicali immaginarj

1.° Che $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b}\sqrt{-1}=\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{-1})^2=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}$; che in conseguenza il prodotto di un numero pari di monomi immaginari di 2.° grado, è reale.

2.° Che $\sqrt{-1})^{4n}=\sqrt{-1})^4)^n=[\sqrt{-1})^2\sqrt{-1})^2]^n=(-1.-1)^n=1$

$$\sqrt{-1})^{4n+1}=\sqrt{-1})^{4n}.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-1})^{4n+2}=\sqrt{-1})^{4n}\sqrt{-1})^2=1.-1=-1$$

$$\sqrt{-1})^{4n+3}=\sqrt{-1})^{4n}\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=1.-1.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$

3.° Che $\sqrt[2m+1]{-1}$ è $=-1$, giacchè la potenza $(2m+1)^{es.}$ dell' eq. $\sqrt[2m+1]{-1}=-1$ dà $-1=-1$; laonde $\sqrt[2(2m+1)]{-1}=\sqrt{-1}$:

E siccome qualunque n.° pari $2m$ equivale a $4n$ ovvero a $4n+2$, e qualunque dispari $2m+1$ a $4n+1$ ovvero $4n+3$, in forza del n.° 2.° si concluderà che $(\sqrt{-1})^{2m}$ è reale, $=+1$ se m divisibile per 2, $=-1$ se per 2 indivisibile; che $(\sqrt{-1})^{2m+1}$ è $=\sqrt{-1}$ se *res.* $\frac{2m+1}{4}=1$, $=-\sqrt{-1}$ se *res.* $\frac{2m+1}{4}=3$. Si trova per es.° $\sqrt{-1})^{42}=\sqrt{-1})^{2.21}=-1$ perchè 2 non divide 21.

Invitati dalla riduzione del n.° 3.° a tentare se anche $\sqrt[2.2m]{-1}$ sia trasmutabile in una semplice funzione di $\sqrt{-1}$, suppongasi $\sqrt[4]{-1}=a+b\sqrt{-1}$, e veggasi se possa rinvenirsi un real valore di a e b, atto a verificare l'ipotesi.

Attesa l'identità $(\sqrt[4]{-1})^2[=(\sqrt{\sqrt{-1}})^2]=\sqrt{-1}$, il quadrato dell'eq. ipotetica è
$\sqrt{-1}=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$ ossia $b^2-a^2=(2ab-1)\sqrt{-1}$, eq. assurda perchè fra quantità eterogenee, ma che può verificarsi se $b^2-a^2=0$ e $2ab-1=0$. Dalla 1.ª $b=a$; la 2.ª diviene $2a^2-1=0$, e somministra

$[a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: dunque $\sqrt[4]{-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})$ e perciò

$$\sqrt[4m]{-1}(=\sqrt[m]{\sqrt[4]{-1}})=[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})]^{\frac{1}{m}},$$

valore il cui sviluppamento (65) ha due parti, l'una e l'altra di un infinito num.º di termini decrescenti, la 1.ª reale che diciamo A, la 2.ª affetta da $\sqrt{-1}$ e che diciamo $\pm B\sqrt{-1}$, dove i n.ⁱ A, B, atteso il rapido decremento de' successivi termini che li compongono, si riguardano come finiti: per conseguenza si assume
$\sqrt[4m]{-1}=A\pm B\sqrt{-1}$.

§. 77. Qualunque espressione immaginaria è della forma

$$\alpha\pm\beta\sqrt[2m]{-1}\pm\gamma\sqrt[2n]{-1}\pm\delta\sqrt[2p]{-1}\pm\text{ec.}\dots(1)$$

Se m, n ec. sono dispari ella si riduce (§. prec. n.º 3.º)
ad $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}\pm\gamma\sqrt{-1}\pm\delta\sqrt{-1}$ ec. $=\alpha\pm(\beta+\gamma\text{ ec.})\sqrt{-1}$ che diciamo $A\pm B\sqrt{-1}$: essendo $m=2\mu$, $n=2\nu$ ec. ciascuna dell' espressioni

$$\alpha\pm\beta\sqrt[2\mu]{-1},\ \gamma\sqrt[2\nu]{-1},\ \delta\sqrt[2\pi]{-1},\ \text{ec.}$$

si trasforma in uno de' respettivi binomj

$$A_1\pm B_1\sqrt{-1},\ A_2\pm B_2\sqrt{-1},\ A_3\pm B_3\sqrt{-1},\ \text{ec.}$$

e facendo $A_1+A_2+A_3$ ec. $=A$, $B_1\pm B_2\pm B_3$ec. $=\pm B$

è $A \pm B\sqrt{-1}$ la finale espressione richiesta.

Qualunque algebrica combinazione di particolari funzioni comprese nella formola (1), produce un risultamento simile al prec., poichè

$$(a \pm b\sqrt{-1})(c \pm d\sqrt{-1}) = ac - bd \pm (bc + ad)\sqrt{-1} = A \pm B\sqrt{-1},$$

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}\left[=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}\right]=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)\sqrt{-1}$$

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1} + \text{ec.} = A + B\sqrt{-1};$$

laonde, qualunque combinazione di quantità della forma $(a+b\sqrt{-1})^m$, ancorchè sia $m=\frac{n}{p}$, può esprimersi per $A \pm B\sqrt{-1}$.

CAPITOLO V.

Estrazione delle Radici.

§. 78. Avendo riconosciuto che l'incertezza e la difficoltà, cui l'estrazione di una radice da un dato polinomio va sottoposta, lasciano desiderare qualche opportuna nozione sull'indole delle potenze letterali, ci proponiamo di esporre quanto su quelle del 2.° e del 3.° grado ci è riuscito di rintracciare.

Espresso un binomio qualunque per $am + a_i m_i$, dove a, a_i, son num.[i], ed m, m_i, monomj letterali, non può supporsi che in $a^2m^2 + 2aa_i mm_i + a_i^2 m_i^2$, sviluppamento di $(am + a_i m_i)^2$, si verifichi alcuna delle ipotesi

$$m^2 = m_{,}^2 \,,\; m^2 = mm_{,} \,,\; mm_{,} = m_{,}^2 \,,$$

d' altronde necessaria per ridurlo ad un minor num.° di termini, senza che ne derivi $m = m_{,}$, il che distrugge la forma binomia della radice.

Si ha inoltre $2aa_{,} = 2\sqrt{a^2 a_{,}^2}$: dunque

Teor. I. *Il quadrato di un binomio è composto di tre termini, e perciò un binomio esclude la esatta radice: almeno un coefficiente numerico equivale alla doppia radice del prodotto degli altri, ed almeno due termini sono quadrati.*

§. 79. Esclusa nella espressione del quadrato di un trinomio qualunque, cioè di $am + a_{,}m_{,} + a_{,,}m_{,,}$, la somiglianza di due quadrati e quella di due prodotti, perchè contraria alla forma trinomia della radice, può farsi una delle ipotesi

$$m^2 = m_{,}m_{,,} \,,\; m_{,}^2 = mm_{,,} \,,\; m_{,,}^2 = mm_{,} \,,$$

non due, altrimenti si ricade nell' assurdo di cui sopra: si ha per es.° $m = m_{,}^2 : m_{,,}$ dalla 2.ª, e la 1.ª diviene $m_{,} = m_{,,}$. Avvertasi che l' identità letterale può combinarsi con la distruzione de' coefficienti, come succede in $(1+2x-2x^2)^2$, che contiene i termini $4x^2, -4x^2$, e si concluderà

Teor. II. *Che il num.° de' termini componenti il quadrato di un trinomio non è* <4 *nè* >6.

§. 80. È noto che il num.° delle riduzioni fra i termini componenti il quadrato di un polinomio è nullo, quando i letterali elementi de' termini che costituiscono la radice sono diversi, e che tal n.° nasce e si aumenta a misura che la diversità sparisce. Si ha per es.°

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$ ...(10 term.); $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\gamma)^2$...(9 term.)

$(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^3+\beta^3)^2$..(7 term.); $(1+2\alpha-2\alpha^2-\alpha^3)$..(5 term.);

e siccome l'introduzione di un nuovo elemento in qualche termine di $1+2\alpha-2\alpha^2-\alpha^3$ diminuisce il n.° delle riduzioni, ragion vuole che un quadrinomio, il cui quadrato ammetta il massimo n.° di riduzioni si rappresenti col simbolo

$$a\alpha^n+b\alpha^{n_{\prime}}+c\alpha^{n_{\prime\prime}}+d\alpha^{n_{\prime\prime\prime}},$$

che diviso per α^n, minima potenza d' α, prende la forma più comoda $a+b\alpha^p+c\alpha^{p_\prime}+d\alpha^{p_{\prime\prime}}$.

Fatto il quadrato, avvertasi che la somiglianza fra' suoi termini dee conciliarsi con la forma quadrinomia della radice, e si vedrà che lo sviluppamento può distribuirsi nell' unica maniera

$$a^2+2ab\alpha^p+b^2\alpha^{2p}+2ad\alpha^{p_{\prime\prime}}+c^2\alpha^{2p_\prime}+d^2\alpha^{2p_{\prime\prime}}+2cd\alpha^{p_\prime+p_{\prime\prime}}$$
$$+2ac\alpha^{p_\prime}+2bc\alpha^{p+p_\prime}+2bd\alpha^{p+p_{\prime\prime}}$$

dove $\{2p=p_\prime,\ p_{\prime\prime}=p+p_\prime,\ 2p_\prime=p+p_{\prime\prime}\}$;

sistema ammissibile perchè la eliminazione di $p_{\prime\prime}$ fra la 2.ª e la 3.ª riproduce la 1.ª. Si esclude la somiglianza de' termini 2.° ed ultimo, perchè l'ipotesi $p=p_\prime+p_{\prime\prime}$ contraddice alle due ult. del sistema superiore ed anche alle ipot. $2p_\prime=p+p_{\prime\prime},\ p_\prime=2p_{\prime\prime}$; e si rigetta la somiglianza de' termini 3.° ed ultimo, altrimenti si avrebbe il sistema assurdo

$$\{2p=p_\prime+p_{\prime\prime},\ p_{\prime\prime}=p+p_\prime,\ 2p_\prime=p+p_{\prime\prime}\}.$$

Affinchè rimanessero quattro soli termini bisognerebbe che coesistessero le identità numeriche

$b^2+2ac=0$, $ad+bc=0$, $c^2+2bd=0$:

Ma eliminando d fra la 2.ª e 3.ª si ottiene $\frac{bc}{a}=\frac{c^2}{2b}$, cioè $2b^2=ac$, e questa contraddice alla 1.ª Dunque due soltanto delle suddette eq.ⁱ si possono supporre coesistenti, e ciò produce l'evanescenza di quattro termini, che combinata con la riduzione di due altri ad uno, dimostra essere il minimo aggregato finale un quintinomio: nè tal conseguenza va soggetta ad alcuna eccezione, perchè una terna di termini simili contraddice alla forma quadrinomia della funzione proposta. Dunque

Teor. III. *Il n.º de' termini componenti il quadrato di un quadrinomio non è* <5 *nè* >10.

§. 81. Osservando che il quadrato di un quintinomio può contenere otto termini, come $(1+a-a^2+a^3-a^4)^2$, ed un maggior numero sino a 15 come... $(a+b+c+d+e)^2$: che il quadrato di un sestinomio può esser composto di dieci termini, come $(1+a-a^2+a^3-a^4+a^5)^2$, e di un maggior n.º sino a 21, e così ec., si raccoglie con induzione, in tutte le occorrenze sicura:

Teor. IV. *Che il n.º de' termini, purchè* >2, *mai non si oppone all' esatta estrazione della radice quadrata di un polinomio, e che questa può essere sì di tre che di quattro termini, se trattisi di un quintinomio o di un sestinomio; di quattro o cinque termini se riferiscasi ad un ottinomio, ec.*

(*) Le prime dieci linee della pag. seg. si cancellino perchè scorrette, e spettanti ad una dimostrazione soppressa.

$$(12)\{\ 2n = n + n_{,,},\ 2n_{,} = n + n_{,,,},\ 2n_{,,} = n_{,} + n_{,,,}.\ 2n_{,,,} = n + n_{,}\ \}$$

Ma il sistema (11) dà $n = n_{,} = n_{,,} = n_{,,,}$; il sistema (12) si riduce a $5n_{,,} = 5n$, $5n_{,,} = 3n$: il 1.° risultato distrugge il quadrinomio, il 2.° è assurdo. Dunque l'eq.[i] del sistema (9) non sono compatibili. Verificandosi lo stesso per rapporto al sistema (10) si può concludere che è impossibile la riduzione di 8 termini a 4 nello sviluppamento del quadrato di un quadrinomio e però ec.

§. 82. Teor. V. Un quintinomio che non escluda la radice quadrata contiene due quadrati positivi, un sestinomio tre, un settinomio uno o due, un ottinomio due o tre, un novinomio tre o quattro, un decinomio quattro.

§. 83. Teor. VI. Il massimo n.° de' segni negativi nel quadrato di un binomio è = 1, in quello di un trinomio, è = 2, ed è = 3 in quello di un quadrinomio.

Ciò risulta dal respettivo sviluppamento di

$$(a-b)^2,\ (a-b-c)^2,\ (a-b-c-d)^2$$

I Teor. prec. servono in moltissimi casi a riconoscere anticipatamente l'impossibilità dell'estrazione.

§. 84. Omessa l'estrazione della radice quadrata da' trinomj, de' quali è troppo facile riconoscere l'esattezza quadratica ed assegnare la radice (Teor. I.) vogliasi

$$\sqrt{[16a^4 - 16a^3b + 28a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4]} (= \sqrt{X})$$

Dopo di avere osservato che la radice, qualora esista, dev' essere un trinomio (Teor. II.) e che la medesima non resta esclusa da' Teor. V e VI, ordino i termini come per la divisione algebrica, e chiamando massimo il termine affetto dalla più alta potenza della lettera, prescelta nella distribuzione de' termini, indico per x il massimo termine della radice, per y la somma degli altri, e però istituisco l' eq.

$$X=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 .$$

Siccome il massimo termine del quadrato necessariamente proviene dal massimo della radice si ha $x^2=16a^4$, $x=4a^2$ ed

$$X=16a^4+8a^2y+y^2 .$$

Tolto $16a^4$ dai due membri resta

$$\text{I} \; -16a^3b+28a^2b^2-12ab^3+9b^4 \; [=(8a^2+y)y]$$

e qualunque sieno i termini affetti da a nel polinomio y, è certo che $-16a^3b$ equivale al prodotto di $8a^2$ pel massimo termine d' y, termine che in conseguenza è $=-\frac{16a^3b}{8a^2}=-2ab$. Sia $y_{\prime}$ ciò che manca a $4a^2-2ab$ per compiere la radice. L' eq.

$$X=(4a^2-2ab)^2+2(4a^2-2ab)y_{\prime}+y_{\prime}^2 ,$$

sopprimendo $(4a^2-2ab)^2$ in ambedue i membri, si riduce a

$$\text{II} \; 24a^2b^2-12ab^3+9b^4=2(4a^2-2ab)y_{\prime}+y_{\prime}^2 ;$$

risultamento che si ottiene più presto sottraendo

dal 1.° membro dell' eq. I il prodotto $-2ab(8a^2-2ab)$, il cui tipo si forma scrivendo il 2.° termine della radice accanto al doppio del 1.°, e moltiplicando il binomio che ne proviene per lo stesso 2.° termine $-2ab$.

Il massimo termine $24a^2b^2$ del polinomio residuale II equivale al prodotto di $8a^2$ pel massimo d'$y_{,}$; perciò quest'ultimo è $\frac{24a^2b^2}{8a^2}=3b^2$

Sapendosi (Teor. II.) che la radice, qualora esista, dev'essere un trinomio, altro non resta che verificare l'identità del polinomio X con $(4a^2-2ab+3b^2)^2$, o più speditamente, del 1.° membro II col prodotto

$$\{2(4a^2-2ab)+3b^2\}3b^2.$$

L'estrazione da un sestinomio è più breve, perchè nell'ipot. che sia un quadrato dee contenere il doppio prodotto del 1.° termine nella somma degli altri due. Avendosi per es.°

$$\frac{c^4}{16}-\frac{abc^2}{2}+a^2b^2+\frac{b^3c^2}{2a}-2b^4+\frac{b^6}{a^2}$$

si scriva $\frac{c^4}{16}+\frac{1}{2}(\frac{b^3}{a}-ab)c^2+a^2b^2-2b^4+\frac{b^6}{a^2}$;

estraggasi la radice dal massimo termine $\frac{c^4}{16}$ e si ponga $\frac{c^2}{4}$ in radice: indi si divida il 2.° termine

$$\frac{1}{2}(\frac{b^3}{a}-ab)c^2 \text{ per } \frac{c^2}{2} \text{ doppio di } \frac{c^2}{4}.$$

Il quoziente $\frac{b^3}{a} - ab$ aggiunto a $\frac{c^2}{4}$ cioè $\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{a} - ab$, forma la radice richiesta, qualora il prodotto

$$\left(\frac{c^2}{2} + \frac{b^3}{a} - ab\right)\left(\frac{b^3}{a} - ab,\right)$$

il cui tipo si forma scrivendo la 2.ª parte della radice accanto al doppio del 1.º termine, e indicando la moltiplicazione del trinomio che ne proviene per la stessa 2.ª parte, coincida col sestinomio proposto diminuito del termine massimo, ciò che infatti succede.

Si cerchi

$$\sqrt{\left[3a^4 + 3a^2 b^2 + b^4 + \frac{a^6}{b_2} + 4a^3 b + \frac{2a^5}{b} + 2ab^3\right]}$$

Dee trovarsi radice ossia

$$R = \frac{a^3}{b} + ab + a^2 + b^2 .$$

§. 85. Ad agevolare il conseguimento della radice quadrata di un dato n.º giovano le seguenti nozioni preliminari:

I. Che i respettivi quadrati di

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
sono	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,

II. Che il quadrato di un n.º N, composto di a unità, b diecine, c centinaja, ec. si decompone nelle parti comprese nello sviluppamento

di $(a+bo+coo$ ec.$)^2$. Così $\overline{56}^2$ è$=(5o+6)^2$ $\overline{5o}^2+2.5o.6+6^2=25oo+6oo+36=3136$.

III. Che $\sqrt{N}$ contiene tante cifre quanti sono i membri di due cifre ne' quali può spartirsi. contando l'ultimo per completo ancorchè non tale. Ciò può dimostrarsi in due maniere:

Dim.ne 1.a. Sia m il n.° delle cifre componenti N, $N_{,}$ il minimo n.° di m cifre cioè $100\ldots(m-1)$; $N_{,,}$ il minimo n.° di $m+1$ cifre, ossia $100\ldots(m)$. È chiaro che

$$N_{,}^2\ [=100\ldots(2m-2)]$$

è composto di $2m-1$ cifre; ed $N_{,,}^2\ [=100\ldots(2m)]$ di $2m+1$ cifre. Ma $N\overset{>}{=}N_{,}$ ed $N<N_{,,}$ perchè $9<10$, $99<100$,ec. Dunque anche $N^2\overset{>}{=}N_{,}^2$ ed $N^2<N_{,,}^2$.

Avvertasi che $N_{,,}^2$ è il minimo n.° di $2m+1$ cifre, e si concluderà che il n.° delle cifre di N^2 dev' essere uno de' seguenti $2m-1$, $2m$. Viceversa se il n.° delle cifre di N è $=2m$, ovv. $=2m-1$, $\sqrt{N}$ è di m cifre, cioè di tante quanti sono i membri di due cifre in cui N può spartirsi contando l'ultimo per completo. Infatti se $\sqrt{N}$ contenesse $m-1$ cifre, il suo quadrato ne conterrebbe un n.°

$$=2(m-1)-1\ ,\ \text{ovv.}\ =2(m-1);$$

cioè un n.° $<2m$ e $<2m-1$: e se il n.° delle cifre di $\sqrt{N}$ fosse $=m+1$ quello delle cifre del suo quadrato sarebbe$=2(m+1)-1$ ovv. $=2(m+1)$, cioè un n.° $>2m-1$ e $>2m$.

* Dim.ne 2.a Sieno $2m$ le cifre di N. Il quadrato del minimo n.° di $m+1$ cifre, cioè $(100\ldots(m))^2$ (1) contiene $2m+1$, ossia $2(m+1)-1$, cifre.

Il quadrato del massimo n.° di $m-1$ cifre, ossia $9^2(111\ldots(m-1))^2$ ne contiene $2(m-1)$. Ciò risulta dalla natura del prodotto di due fattori della forma $111\ldots(m-1)$, perchè la moltiplicazione per la 2.a cifra 1 accresce di una cifra il prodotto, di una nuova cifra l'accresce la moltiplicazione per la 3.a cifra 1, ec.; l'aumento finale essendo di $m-2$ cifre, il total n.° di esse in $(111\ldots(m-1))^2$ è $=m-1+m-2=2m-3$: ma il predetto quadrato necessariamente comincia per 1234... (70 Nota) e la moltiplicazione di un tal n.° per 81 ($=9^2$) non può aumentare che di una sola cifra il prodotto. Dunque il quadrato del massimo n.° di $m-1$ cifre ne contiene $2(m-1)$. Per conseguenza il n.° delle cifre componenti $\sqrt{N}$ è $<m+1$ e $>m-1$ cioè $=m$.

Lo stesso calcolo si adatta all' ipot. che le cifre di N sieno $2m+1$: basta osservare che il quadrato del minimo n.° di $m+2$ cifre, cioè $(100\ldots(m+1))^2$, ne ha $2m+3$; che ne ha $m+m-1$ ossia $2m-1$ il n.° $(111\ldots(m))^2$, e però $2m$ il quadrato del massimo n.° di m cifre $9^2(111\ldots(m))^2$.

Es.° 1.° Si dimanda $\sqrt{5476}$.

Qualunque sia la radice richiesta è certo (n.° III) ch' ella dev'essere composta di due

(1) Il simbolo $100\ldots(m)$ significa che l' unità dev' essere seguita da m zeri.

cifre, che il quadrato della 1.ª cifra non contiene unità di un ordine inferiore al centinajo, che in conseguenza $(bo)^2$ sta in 5400, cioè b^2 in 54; che de' quadrati minori di 54 si dee prendere il massimo M^2; perchè $(Mo)^2$ è necessariamente < 5476. In generale si ha $(Mo)^2 \overline{=} o < N$, dove il segno = corrisponde al caso che il 1.º membro a sinistra del n.º N sia un quadrato e le cifre del 2.º membro sieno due zeri.

Il massimo quadrato M^2 essendo nel caso attuale 7^2 (=49), tolgasi questo da 54 ed accanto al residuo 5 scrivasi il 2.º membro 76. Il n.º 576 dee contenere $2\times70\times a + a^2$ e la 1.ª parte di questo 2.º n.º cioè $2\times7\times ao = 14 . ao$, siccome non contiene unità semplici dee trovarsi in 570, vale a dire che $14a$ dee stare in 57. Dunque $14a \overline{=} o < 57$, dove il segno = si riferisce all'ipot. di $a < 4$. Qualunque sia l'ipot. può prendersi per a l'intiero compreso in 57 diviso per 14, cioè $a = \frac{57}{14} = 4$, purchè il n.º che si ottiene sostituendo 4 per a in $2\times70\times a + a^2$ possa sottrarsi da 576. Effettuata la sostituzione si trova

$2\times70\times4+4^2 = 560+16 = 576$ e $576-576$ è $= 0$.

Dunque il valore $a=4$ è ammissibile e si ha esattamente $\sqrt{5476}=74$.

Siccome $2ba+a^2$ è $= (2b+a)a$ si forma subito il n.º $2\times70\times4+4^2$ (=576) scrivendo la 2.ª cifra provvisoria 4 accanto al doppio 14 della 1.ª 7, e moltiplicando per la stessa 2.ª cifra 4 il risultamento 144.

Es.° 2.° Si dimanda $\sqrt{54756}$.

Siccome (n.° III) la radice dee contenere tre cifre, si cerchi col metodo prec. la radice prossima in n.[i] intieri di 547, ed avendola trovata $=23$ si tolga $(23)^2=529$ da 547: quindi si consideri 23 come la 1.ª parte b della radice richiesta, e procedasi alla ricerca della 2.ª dividendo 185, n.° composto del residuo 18 $(=547-529)$ e della cifra 5 spettante al 1.° membro, per 2×23; ottenuto il quoziente 4 si tenti la sottrazione di 464×4 $(=1856)$, e perchè questa può effettuarsi sarà $234=\sqrt{54756}$. La predetta radice è esatta perchè il residuo della sottrazione è $=0$.

Quando N è di 4 membri si cercano le prime tre cifre della radice come se il n.° dato fosse composto de' primi tre membri a sinistra; si riguarda la predetta radice parziale come la 1.ª parte b di $\sqrt{N}$ e si opera come sopra per determinare la 2.ª.

Si scrive zero in radice quando la divisione pel doppio della radice parziale già trovata non può effettuarsi.

Ecco il prospetto dell' operazione per un n.° di 5 membri. I n.[i] accompagnati dalle lettere $D_{,}$, $D_{,,}$, ec. sono il doppio delle respettive radici parziali successivamente ottenute:

R. 32323

$N = 10.44.77.63.29$
9
$D_{,}$ 6 / 144
124
$D_{,,}$ 64 / 2077
1929
$D_{,,,}$ 646 / 14863 ... $N_{,}$
12924
193929
D_{IV} 6464 / 193929
0

62 × 2 = 124, 643 × 3 = 1929,
6462 × 2 = 12924, 64643 × 3 = 193929

§. 86. Trovate m cifre si ottengono con un semplice artifizio tutte in una volta $m-1$ cifre susseguenti.

Detta a la parte cognita della radice, x quella che rimane a trovarsi si ha $N=a^2+2ax+x^2$, e quindi

$$\frac{N-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a} \quad \text{dove} \quad \frac{x^2}{2a} < 1$$

perchè il n.° delle cifre d' x^2 è (85 n.° III) $=2(m-1)$ ovvero $=2(m-1)-1=2m-3$, mentre a è composto di m cifre seguite da $m-1$ zeri, cioè di $2m-1$ cifre. Dunque il numero che deve unirsi ad a per formare in n.^{i} intieri il valore di $\sqrt{N}$ è $x=\frac{N-a^2}{2a}$ in n.^{i} intieri.

Il calcolo del n.° intiero $\frac{N-a^2}{2a}$ è precisamente

te quello con cui con l'ordinario metodo si procede alla ricerca della $(m+1)^{esima}$ cifra della radice. Si tratta di dividere per $2a$ il n.° corrispondente a $D_{(m)}$. Nell' es.° prec. dove $n=3$ si

ha $\frac{N-a^2}{2a}$ = al n.° $\frac{N_{\prime}}{2a}=\frac{14863}{2a}$. In fatti

$$N-a^2=\left\{\begin{array}{r} 1044776329 \\ -1043290000 \end{array}\right\}=1486329:$$

ma perchè $2a=64600$, si trova lo stesso quoziente intiero dividendo 14863 per 646 $(=2a)$

Il prec. artifizio cessa di esser utile quando N supera il massimo quadrato compreso nella tavola delle potenze, perchè dopo aver trovato il n.° x fa d'uopo assicurarsi se $a+x$ sia la radice esatta, il che dipende dall' identità d' x^2 col numeratore della frazione residuale. Nell' es.° 3.° cercando 23 si risparmia la sola operazione che serve alla ricerca dell' ultima cifra 3, ma in compenso bisogna sperimentare se $(23)^2=529$, numeratore della frazione residuale $\frac{529}{64600}$, risultante dalla divisione di 1486329 $(=N-a^2)$ per $2a=64600$.

§. 87. Trovate tante cifre di $\sqrt{N}$ quanti sono i membri di due cifre in cui N può spartirsi (85 n.° III) si prosegue l' estrazione, aggiungendo all' ultimo residuo, che sempre si ha quando N non è un quadrato, m coppie di zeri, e separando con la virgola m cifre verso la destra. Ciò infatti equivale a sostituire

$$\sqrt{\left[\frac{N\times(100\ldots(m))^2}{(100\ldots(m))^2}\right]}$$ ossia $$\frac{1}{100\ldots(m)}\sqrt{\left[N\times(100\ldots(m))^2\right]}$$ a $\sqrt{N}$.

Trattandosi per es.° di assegnare la radice quadrata di 54768 si trova $\sqrt{54768}=234$ ed il residuo 12 su cui non può proseguirsi l'operazione, ma supponendo moltiplicato e diviso il n.° proposto per $(1000)^2$, si hanno tre coppie di zeri consecutive alla cifra finale 8, le quali si possono successivamente collocare alla sinistra del residuo respettivo, e ciò da luogo a rintracciare tre nuove cifre della radice, che per altro si separano con la virgola perchè il risultamento finale si dee dividere per 1000. Ecco il prospetto di tutta l' operazione.

```
            R. 234,025...
              5.47.68
              4
              ---
        D, 4/ 147
     43×3= 129
              ----
         46/ 1868
    464×4= 1856
              ----
          468/ 1200
         4680/ 120000
    46802×2= 93604
                -------
        46804/ 2639600
  468045×5= 2340225
                -------
                 299375
```

Per mettere in pratica l' artifizio del §. prec. vogliasi $\sqrt{2}$ con 6 decimali.

Aggiunte 6 coppie di zeri alla sinistra della cifra 2 si cerchino le prime 4 cifre col solito metodo, cioè:

```
            R. 1,414213|5
         ____________________
          2.00.00.00.00.00.00
          1
         ____
          100
        2
  24×4=  96
         _____
          400
       28
  281×1= 281
         _____
          11900
      282
 2824×4= 11296
         _______
            604
```

Ad oggetto di avere tutte in una volta le tre cifre seguenti si divida 604000 per 2828 (=2×1414) (così soppriimonsi tre zeri nel dividendo e nel divisore): il quoziente è 2135, e nel caso attuale risulta esatta anche l' ultima cifra 5. (1)

(1) Alcuni propongono di mettere N sotto la forma di $\alpha^2 + \beta$, dove $\alpha > \beta$ ed α^2 il quadrato più vicino ad N, e di svolgere $(\alpha^2 + \beta)^{1/2}$. Questo metodo però è sovente meno esatto, sempre più laborioso, segnatamente se N sia molto grande, perchè la determinazione di α^2, se non abbiasi pronta la tavola delle potenze, esige l'estrazione di $\sqrt{N}$ in n.i intieri. Così per procedere alla ricerca di $\sqrt{54768}$

§. 88. Se N è una frazione si svolge in decimale, con l' avvertenza che le cifre dopo la virgola sieno di n.° pari $2m$: si tratta il nuovo n.° come intiero, e nel risultamento si separano con la virgola m cifre a destra. Così

$$\sqrt{^3/_7} = \sqrt{0,428571} = 0,654.$$

Infatti moltiplicando 3 e 7 per $(1000)^2$ si ottiene

$$\sqrt[1]{\frac{3}{7}} = \frac{1}{1000}\sqrt[1]{\frac{3000000}{7}} = \frac{1}{1000}\sqrt{428571} = \frac{654}{1000}.$$

Si ha pure $\sqrt[1]{\frac{24}{7}} = \sqrt{3,428571} = 1,904$.

Cangiando $\frac{3}{7}$ in $\frac{3.7}{7\cdot 7} = \frac{21}{49}$ si ha $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt[1]{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

fa d'uopo trovare la radice intiera 234, indi effettuare il fastidiosissimo sviluppamento $[(234)^2+12]^{1/2} = 234 + {}^1/_2 \cdot \frac{12}{234}$ ec., e finalmente sommare parecchi termini.

Trattandosi per es.° di appurare $\sqrt{150}$ si fa $\sqrt{150} = \sqrt{[(12)^2+6]}$; poi bisogna dedurre

$$\sqrt{[(12)^2+6]} = 12 + \frac{6}{24} - \frac{36}{8\times 1728} + \frac{216}{16\times 248832} - \frac{5\times 1296}{128\times 3581808} \text{ ec.}$$

$$= 12 + \frac{1}{4} - \frac{9}{3456} + \frac{1}{18432} - \frac{135}{9551488} \text{ ec.}$$

$$= \left\{\begin{array}{rl} & 12 \\ + & 0,25 \\ - & 0,0026041 \\ + & 0,0000542 \\ - & 0,0000141 \end{array}\right\} = 12,2474360.$$

ma le tre ultime cifre di questo risultamento sono difettive giacchè il vero valore di $\sqrt{150}$ è 12,2474487, ed il metodo del §. 86 lo somministra speditamente.

e perchè $\sqrt{21}=4,593$ si ottiene $\sqrt{3/7}=0,656$, valore ch'è già eccedente alla 3.ª cifra.

§. 89. Coi principj sopra esposti si risolve ogni eq. di 2.° grado, cioè $x^2+px+q=0$, dove p,q suppongonsi due n.i dati.

Infatti il 1.° membro dell' eq. $x^2+px=-q$, siccome equivale ad $x^2+2x.\frac{1}{2}p$, comprende il quadrato d' x, più il doppio prodotto d' x in un 2.° termine $\frac{1}{2}p$, ed altro non si richiede che aggiungergli $(\frac{1}{2}p)^2$ perchè coincida con $(x+\frac{1}{2}p)^2$. Facciasi la stessa addizione al 2° membro onde non alterare l'eq. e si vedrà che per liberare l'incognita nell' eq.

$$x^2+2x.\tfrac{1}{2}p+(\tfrac{1}{2}p)^2=(\tfrac{1}{2}p)^2-q,$$

equivalente alla proposta, basta estrarre la radice quadrata dall' una e dall' altra parte poichè si ottiene

$$x+\tfrac{1}{2}p=\sqrt{[(\tfrac{1}{2}p)^2-q]};$$

quindi $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{[(\frac{1}{2}p)^2-q]}$, ossia

$$x=\tfrac{1}{2}(-p\pm\sqrt{p^2-4q}).$$

si prende $\pm\sqrt{}$ perchè $(\pm a)^2=a^2$.

I due prec. valori d'x hanno la proprietà di verificare la proposta, vale a dire che se si sostituiscono successivamente per x in $x^2+px+q=0$ danno il risultamento identico $-q+q=0$ (1) Il prodotto

$$[x+\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}]\,[x+\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}]$$

coincide con la proposta.

(1) La risoluzione dell' equazioni è da noi esposta nel Libro IV. del Calcolo Algebrico. I primi principj che abbiamo anticipati erano indispensabili per l' intelligenza delle dottrine ausiliari dell' Analisi Algebrica.

La somma de' valori d' x è $=p$, il prodotto $=q$.

§. 90. Ecco, per rapporto alla esistenza della radice cubica letterale alcuni canoni.

Prescindendo da' coefficienti numerici che non influiscono nelle riduzioni, apparisce che non può immaginarsi eguaglianza fra due de' monomj

m^3, $m^2m_{\prime}$, $mm_{\prime}^2$, $m_{\prime}^3$, componenti $(m+m_{\prime})^3$,

senza che ne derivi $m=m_{\prime}$, il che distrugge il supposto binomio: dunque

Teor. I. Un' espressione letterale, che ammetta la radice cubica binomia, dev' essere quadrinomia e contenere due cubi: viceversa un' espressione quadrinomia non può avere la radice cubica sotto altra forma che quella di un binomio.

Teor. II. Un' espressione che ammetta la radice cubica trinomia non ha più di 10 termini nè meno di 5. Omessa la 1.ª parte che resta verificata dallo sviluppamento di $(a+b+c)^3$ (pag. 111.) si tratta di riconoscere il massimo numero delle riduzioni fra i monomi

$m^3, m^2m_{\prime}, m^2m_{\prime\prime}; m_{\prime}^3, m_{\prime}^2m, m_{\prime}^2m_{\prime\prime}; m_{\prime\prime}^3, m_{\prime\prime}^2m, m_{\prime\prime}^2m_{\prime}; mm_{\prime}m_{\prime\prime}$,

ed a tale oggetto trascuriamo subito quelle che manifestamente distruggono la forma trinomia, come $m^2m_{\prime}=m^2m_{\prime\prime}$, $m^3=m_{\prime}^3$, $m^3=m_{\prime\prime}^3$, ec. e passiamo a fare le ipotesi

$$\{m^2m_{\prime}=m_{\prime}^2m_{\prime\prime}, m^2m_{\prime\prime}=m_{\prime\prime}^2m_{\prime}. mm_{\prime}^2=m^2m_{\prime\prime},$$
$$mm_{\prime}^2=m_{\prime}m_{\prime\prime}^2, \quad m^2m_{\prime}=mm_{\prime\prime}^2\} \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

Dalle due prime risulta $m^2=m_{\prime}m_{\prime\prime}$, riduzione non ripugnante. La 3.ª dà $m_{\prime}^2=mm_{\prime\prime}$; le ultime danno $m_{\prime\prime}^2=mm_{\prime}$: dalla prec. $m_{\prime\prime}=\frac{m_{\prime}^2}{m}$ e questa trasforma la $m^2=m_{\prime}m_{\prime\prime}$ in $m=m_{\prime}$; così da $m_{\prime\prime}^2=mm_{\prime}$ si

ritrae $m_{,}=\frac{m_{,,}^2}{m}$ e sostituendo, in $m^2=m_{,}m_{,,}$ si trova $m^3=m_{,,}^3$: dunque le due prime ipotesi *I* sono compatibili insieme, ed incompatibili con ciascuna delle altre: la 3.ª non può neppur essa conciliarsi con una dell'ultime due perchè ne proverrebbe $m_{,}=m_{,,}$: dunque due sole riduzioni del sistema *I*, cioè le due prime o le ultime due, possono ammettersi. Ma supposte le due prime non sussiste $m^3=m_{,}^2m_{,,}$, giacchè ne deriva $m^3=m^2m_{,}$ ed $m=m_{,}$; non $m^3=m_{,}m_{,,}^2$ perchè sarebbe $m^3=m^2m_{,,}$ ed $m=m_{,,}$; non $m^3=mm_{,,}^2$ nè $=mm_{,}^2$; non $m^3=m^2m_{,}$ nè $=m^2m_{,,}$. È chiaro altresì che la $m^2=m_{,}m_{,,}$ esclude $m_{,,}^3=m^2m_{,}$, $m_{,,}^3=mm_{,}^2$. Resta $m^3=mm_{,}m_{,,}$ che riproduce l'ipot. principale, ed è inconciliabile con $m_{,}^3=mm_{,}m_{,,}$, $m_{,,}^3=mm_{,}m_{,,}$. Se si verificano le due ultime del citato sistema, cioè se $m_{,,}^2=mm_{,}$, le riduzioni possibili sono due, perchè, omesse quelle che appariscono assurde, dalle $m^3=m_{,}^2m_{,,}$, $=m_{,}m_{,,}^2$, nasce $m=m_{,}$, e la $m^3=mm_{,}m_{,,}$, posto $m_{,,}^2$ per $mm_{,}$, produce $m=m_{,,}$.

La 3.ª ipotesi $m_{,}^2=mm_{,,}$ è anche meno favorevole, poichè ripugna ad

$$m^3=m_{,}^2m_{,,},\ =m_{,}m_{,,}^2,\ mm_{,}m_{,,},$$

che divengono $m=m_{,,}$, $m=m_{,}$; ed una simile incongruenza si estende ad

$$m_{,}^3=m^2m_{,,},=mm_{,,}^2,=mm_{,}m_{,,};m_{,,}^3=m^2m_{,},=mm_{,,}^2=mm_{,}m_{,,}.$$

Infatti l'identità principale dà $m_{,,}=m_{,}^2:m$ e la 1.ª delle precedenti diviene $m_{,}=m$; la stessa identità somministra $m=m_{,}^2:m_{,,}$, che riduce la 2.ª ad $m_{,}=m_{,,}$ e così ec.

Dunque tre sole coppie fra i termini componenti

il cubo di un trinomio ammettono riduzione vale a dire che ec. Due di dette coppie svaniscono ⊤

È dunque vero che la radice cubica di un quadrinomio è necessariamente binomia come si disse (Teor. I. par. 2.ª).

§. 93. Teor. IV. Un polinomio di 9 o di 10 termini esclude la radice cubica 1.º se respettivamente non contiene due o tre cubi: 2.º se abbia un n.º di termini negativi >6.

Basta osservare lo sviluppamento

$$(am-am_{,,}-a_{,}m_{,,})^3=a^3m^3-a_{,}^3m_{,}^3-a_{,,}^3m_{,,}^3-3a^2m^2(a_{,}m_{,}+a_{,,}m_{,,})$$
$$+3a_{,}^2m_{,}^2(am-a_{,,}m_{,,})+3a_{,,}^2m_{,,}^2(am-a_{,}m_{,})+6aa_{,}a_{,,}mm_{,}m_{,,}.$$

Es.º si dimanda

$$\sqrt[3]{(a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3)}\ (=\sqrt[3]{C}).$$

Siccome i primi tre criterj non contraddicono alla radice binomia, ordinati i termini deduco $\sqrt[3]{a^3}=a$; fo la radice $R=a+y$ e tolto il cubo a^3 da ambe le parti ho

$$\text{I}\quad 6a^2b+12ab^2+8b^3=3a^2y+3ay^2+y^3.$$

Siccome uno stesso valore d'y dee verificare tutte e tre l'eq.ⁱ

$$6a^2b=3a^2y,\ 12ab^2=3ay^2,\ 8b^3=y^3$$

ricavo dalla 1.ª $y=\dfrac{6a^2b}{3a^2}=2b$, e perchè questo valore verifica le altre due concludo che $a+2b$ è la radice richiesta.

⊤ se in $(am+a_{,}m_{,}+a_{,,}m_{,,})^3$ sia $am.a_{,,}m_{,,}=a_{,}^2m_{,}^2$ ed a ovv. $a_{,,}<0$ come in $(a^2+a^3-a^4)^3=a^6+3a^7-5a^9+3a^{11}-a^{12}$.

La verificazione prec. forse in pratica non si ottiene con egual prontezza osservando se il 1.° membro dell' eq. I. coincide con

$$[3a^2+3a\times 2b+(2b)^2]2b,$$

espressione il cui tipo si forma scrivendo accanto al triplo quadrato del 1.° termine il triplo prodotto del 1.° nel 2.° ed il quadrato del 2.°, e moltiplicando il tutto per lo stesso 2.° termine.

§. 94. Il metodo con cui si procede alla determinazione di $\sqrt[3]{N}$ suppone tre nozioni preliminari:

I. Che i respettivi cubi di

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
sono 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

II. Che il cubo di un n.° composto di a unità e b diecine contiene le parti che costituiscono lo sviluppamento di $(b0+a^3.)$ Così $(56)^3=(50+6)^3$; $(756)^3=(750+6)^3$; ec. b essendo nel 1.° caso $=5$, nel 2.° $=75$ diecine; ec.

III. Che le cifre di $\sqrt[3]{N}$ sono tante quanti i membri di tre cifre in cui N può spartirsi contando l'ultimo per completo ancorchè non tale.

Sia m il n.° delle cifre di N, $N_{,}$ il minimo n.° di m cifre, cioè $100\ldots(m-1)$; $N_{,,}$ il minimo n.° di $m+1$ cifre, ossia $100\ldots(m)$.

È chiaro che $N_{,}^3\ [=100\ldots.3\,(m-1)]$ contiene $3m-2$ cifre;

che $N_{,,}^3\ [=100\ldots 3m]$ ne contiene $3m+1$:

Ma N è $=$ ò $> N_{,}$ ed $N < N_{,,}$ perchè $9 < 10$; $99 < 100$; ec. all' infinito: dunque anche $N^3 =$ ò $> N_{,}^3$ ed $N^3 < N_{,,}^3$: avvertasi che $N_{,,}^3$ è il minimo n.° di $3m+1$ cifre, e si concluderà che il n.° delle cifre componenti il n.° N^3 dev' essere uno dei seg.: $3m-2$, $3m+1$, $3m$.

Viceversa se il n.° delle cifre componenti un dato n.° N sia espresso da una delle formole $3m-2$, $3m+1$, $3m$, la sua radice cubica è composta di m cifre, cioè di tante quanti sono i membri di tre cifre in cui N può spartirsi contando l' ultimo per completo: Infatti se $\sqrt[3]{N}$ contenesse $m-1$ cifre il suo cubo ne conterrebbe un n.° espresso da una delle formole

$$3(m-1)-2(=3m-5);\ 3(m-1)-1(=3m-4);\ 3(m-1)=3m-3:$$

E se il n.° delle cifre di $\sqrt[3]{N}$ fosse $=m+1$, quello delle cifre componenti il suo cubo sarebbe espresso da una delle formole

$$3(m+1)-2(=3m+1);3(m+1)-1(=3m+2);3(m+1)(=3m+3).$$

Ciò posto si voglia $\sqrt[3]{175616}$.

Indicando la radice per $bo+a$ (n.° III.) si ha (n.° II.)

$$175616=(bo)^3+3(bo)^2a+3bo\times a^2+a^3$$

ed il cubo $(bo)^3$, siccome non contiene unità di un ordine inferiore al migliajo, dee trovarsi in 175000. Per determinare la cifra b basta dunque cercare il massimo cubo 125 compreso in 175 ed assumere $b=\sqrt[3]{125}=5$. Questa

cifra non può essere troppo forte, perchè $(bo)^3$ ossia $(50)^3 = 125000$ è necessariamente < 175616.

Tolto da 175 il cubo 125 scrivasi accanto al residuo 50 il 2.° membro 616, ed il residuo totale 50616 dovrà contenere i n.i $3.(bo)^2 a$, $3.bo \times a^2$, a^3.

Se si conoscesse il n.° $3(bo)^2 . a$ basterebbe dividerlo per $3 \times \overline{50}^2$ $(= 3(bo)^2)$ e si avrebbe la 2.a cifra a. Non conoscendolo fa d'uopo assegnare un limite che circoscriva l'errore in cui si può cadere, ed è necessaria una regola per correggerlo.

Il n.° $3(bo)^2 a$, le di cui infime unità sono le centinaja, dee trovarsi in 50600. Ciò equivale a dire che 506 è un limite superiore di $3b^2 a (= 3.5^2 . a)$. Si noti con un punto la penultima cifra 1 e si divida 506 per $75 (= 3 \times 5)^2$. Il quoziente è 6, e perchè il n.° $3.(50)^2 6 + 3\,50.6^2 + 6^3$ si può sottrarre da 50616, è 6 la 2.a cifra richiesta. Il n.° 56 costituisce la radice cubica esatta perchè l'anzidetta sottrazione non dà residuo. S' ella non fosse stata possibile si sarebbe diminuito di una unità il quoziente 6: in ciò consiste la correzione dell' errore a cui l' esposto metodo va soggetto.

Quando il triplo quadrato della 1.a cifra posta in radice non cape nel dividendo si scrive zero per 2.a cifra.

Trattandosi di estrarre la radice cubica da un n.° le cui cifre sieno più di 6 e meno di 10, avvertasi 1.° (n.° III.) Che la radice è necessariamente della forma $c\,oo + bo + a$;

2.° Che il cubo di $c00+b0$ non contiene unità di un ordine inferiore al migliajo, e però non può far parte delle ultime tre cifre: 3.° Che trovata la radice parziale $c0+b$, del n.° composto degli ultimi due membri a sinistra, altro non rimane che riguardare $c0+b$ come la 1.ª parte della radice totale, e procedere col metodo dell' es.° prec. alla ricerca della 2.ª parte a.

Trattandosi per es.° di assegnare $\sqrt[3]{12.487.168}$ si cerca la radice cubica 23 di 12.487: da questo n.° si toglie $(23)^3$ cioè 12167; accanto al residuo 320 si scrive il 1.° membro 168, e considerando 23 come la 1.ª parte della radice si divide per $3(23)^2$ $(=1587)$ il n.° 3201, escludendo le ultime due cifre 6, 8, perchè l'unità dell'infim' ordine contenuta in $3(230)^2\times a$ è il centinajo. Il quoziente 2 è ammissibile perchè

$3(230)^2\times2+3\times230\times2^2+2^3$ ossia 320168 può sottrarsi dal n.° residuale 320168: anzi perchè la sottrazione non dà residuo la radice è esatta.

Si cerchi $\sqrt[3]{12.503.322.161}$. Ella dev' essere 2321.

§. 95 Trovata la radice in n.¹ intieri si prosegue l'estrazione in n.¹ decimali aggiungendo tre zeri all' ultimo residuo: la nuova cifra esprime decimi di unità: si aggiungono tre altri zeri al residuo susseguente e la cifra ottenuta esprime centesimi, e così ec.

Infatti l'addizione di una terna di zeri equivale alla moltiplicazione del n.° proposto

per 1000 e però della sua radice cubica per 10; la giunta di 6 zeri moltiplica il n.° per un milione e la radice cubica per 100 perchè $\sqrt[3]{1000000}=100$; ec.

L' operazione prec. si può compendiare con un artifizio analogo a quello del §. 86, perchè facendo $\sqrt[3]{N}=a+x$ risulta

$$\frac{N-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2} \text{ dove } \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{3a^2},$$

sono frazioni genuine purchè il n.° x contenga una cifra meno di a (1). Cercando per es.° $\sqrt[3]{74.394.516}$ con 4 decimali si opera nella maniera seg.

```
         R. 420,5
         74. 394. 516
         64
         10394
48/
         10088  (=3)40(² ×2+3×40×4+8)
          30651 6000
5292/
529200/26491 5125(=3)4200(² ×5+3×4200×5² ×5³ ).
         41600875
```

Aggiunti tre zeri al residuo 41600875 si divida il n.° che ne proviene per 53046075 [$=3\times(4205)^2$] e si avrà per quoziente 784: quindi

(1) Che $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3}{3a^2}$ sieno frazioni genuine si verifica come nel §. 86.

$$\sqrt[3]{74.394.516} = 420,5784 \text{ (1)}$$

§. 96. Se $N = \frac{a}{b}$ si cangi $\frac{a}{b}$ in $\frac{ab^2}{b^3}$ e si avrà $\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$. Così

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{3.4^2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{48}}{4} = \frac{3,63}{4} = 0,91.$$

(1) Per l' estrazione della radice cubica approssimata alcuni autori propongono un metodo analogo a quello che indicammo nella Nota del §. 88. Essendo α^3 il massimo cubo compreso in N, $\beta = N - \alpha^3$ pongono $\sqrt[3]{N}$ sotto la forma $(\alpha^3 \pm \beta)^{1/3}$ e sommano alcuni termini dello sviluppamento. Essi fanno per comodo $\alpha^3 = x$, $\beta = xy$ rappresentano per A il 1.° termine, per B il 2.° ec. della formola (1) del §. 64: dove si suppone sostituito $1/3$ per m, e ricavano $\sqrt[3]{N}$ dalla formola

$$(x + xy)^{1/3} = A + {}^1/_3 Ay - {}^1/_3 By - {}^5/_9 Cy - {}^2/_3 Dy - {}^{11}/_{15} Ey \text{ ec.}$$

che oltre di essere sommamente laboriosa, esige anche l' estrazione di $\sqrt[3]{N}$ in n.i intieri onde avere x $(= \alpha^3)$. Cercandosi per es.° la $\sqrt[3]{}$ del n.° 74.394.516 contemplato sopra, convien trovare $x = (420)^3$: dedurre dall' eq. $x + xy = 74.394.516$ il valore d' y cioè

$$y = \frac{74394516}{74088000} - 1 = 0,0041372,$$

dove si prendono 7 decimali per averne 3 esatte nella radice, per lo che fa d' uopo averne esatte 5 nella respettiva espressione di $1/3\ Ay$, $1/3\ By$, ec. Facendo tutti i calcoli si ottiene:

$$A\ (= x^{1/3}) = 420,\quad B_{,}\ (= {}^1/_3\ Ay) = {}^1/_3\ 420 \times 0,0041372 = 0,5792080;$$

$$C_{,}\ (= -{}^1/_3 By) = -{}^1/_3 \times 0,5792080 \times 0,0041372 = -0,0007987\ldots;\ D_{,} = 0,00000 \text{ ec.}$$

$$\text{e } \sqrt[3]{74394516}\ (= A + B_{,} + C_{,}) = \left\{\begin{array}{l} 420 \\ +0,5792080 \\ -0,0007987 \end{array}\right\} = 420,5784093.$$

Un calcolo così prolisso dà solo per accidente la 4.a cifra esatta.

Si può anche trasformare $\frac{a}{b}$. in decimale composto di un n.° di cifre multiplo di 3: il n.° che ne proviene si tratta come intiero ma si pone la virgola innanzi alla 1.ª cifra. Si ha per es.° $\sqrt[3]{3/7} = \sqrt[3]{0,428} = 0,7$.

Dicasi lo stesso per rapporto ad un n.° frazionario. Essendo $N = \alpha + \frac{a}{b}$ si trasforma $\frac{a}{b}$ come sopra: il risultamento si scrive di seguito ad α, ed estratta la radice da questo n.° considerato come intiero, si caratterizzano per decimali tante cifre a destra quante sono le terne di decimali componenti l'espressione di $\frac{a}{b}$.

Per es.°

$$\sqrt[3]{(5+3/4)} = \sqrt[3]{5,75} = \frac{\sqrt[3]{5750000}}{100} = \frac{179}{100} = 1,79.$$

§. 97. Quando l' indice del radicale è un n.° composto, cosicchè sia $m = m_{\prime} m_{\prime\prime} m_{\prime\prime\prime}$ ec. giova trasformare $\sqrt[m]{N}$ in $\sqrt[m_{\prime}]{\sqrt[m_{\prime\prime}]{\sqrt[m_{\prime\prime\prime}]{\ldots N}}}$.

Così $\sqrt[4]{N} = N^{1/4} = (N^{1/2})^{1/2} = \sqrt{\sqrt{N}}$:

$\sqrt[6]{N} = N^{1/6} = (N^{1/2})^{1/3} = (N^{1/3})^{1/2} = \sqrt[3]{\sqrt{N}}\sqrt{\sqrt[3]{N}}$.

$\sqrt[8]{N} = ((N^{1/2})^{1/2})^{1/2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}}$.

$\sqrt[9]{N} = (N^{1/3})^{1/3} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{N}}$; $\sqrt[10]{N} = (N^{1/2})^{1/5} = \sqrt[5]{\sqrt{N}}$
$= \sqrt{\sqrt[5]{N}}$; ec.

Se m è primo, $= 5, 7, 11$ ec., il metodo analogo a quello di cui si è fatto uso nell' ipot.

di $m=2$ e di $m=3$ diviene intralciato e sovente impraticabile. In tali casi è del tutto opportuno l'ingegnosissimo metodo immaginato dal valoroso Geometra Prof.[re] *Ruffini*, e noi l'esporremo sotto la più semplice forma possibile nel T. III, perchè dipende dalla teorìa dell'equazione.

* §. 98. Qualora m sia un piccol n.° > 3 ed N non oltrepassi i limiti della tavola delle potenze, può essere opportuno il seg. artifizio.

Trovata la potenza m.[esima] a^m più vicina ad N pongasi $\sqrt[m]{N}=a \pm x$. Il n.° x dev' essere < 1 perchè se fosse $x = h \pm \frac{a}{b}$ sarebbe $(a + h)^m$ ovvero $(a + h + 1)^m$ la potenza m.[esima] prossima ad N. Attesa la piccolezza d'x si sopprimano in $(a \pm x)^m$ i termini affetti da x^2, x^3 ec. e trascurato il segno $-$ perchè x risulta negativo quando a è $> \sqrt[m]{N}$, si scriva $(a + x)^m = a^m + ma^{m-1} x = N$: quindi $x = \frac{N - a^m}{ma^{m-1}}$ e però

$$\sqrt[m]{N} = a + \frac{N - a^m}{ma^{m-1}} = \frac{(m-1)\,a^m + N}{ma^{m-1}}.$$

Basta sostituire questo valore per a e ripeter l'operazione per avere un'approssimazione più forte (1).

(1) Applicando la prec. formola alla ricerca di $\sqrt{2}$ si vedrà che non bastano tre sostituzioni successive, operazione più lunga di quella del §. 88, per ottenere 6 decimali esatte:

Tenendo conto del 3.° termine di $(\alpha + x)^m$ l'eq. del probl. è

$$\alpha^m + m\alpha^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{m-2}x^2 = N:$$

quindi $$x = \frac{N - \alpha^m}{m\alpha^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{m-2}x},$$

e sostituendo nel 2.° membro $\frac{N-\alpha^m}{\pm m\alpha^{m-1}}$ per x,

si ottiene $$x = \frac{2\alpha(N-\alpha^m)}{(m+1)\alpha^m + (m-1)N},$$

Dunque $$\sqrt[m]{N} = \frac{\alpha[\overline{m+1}.N + \overline{m-1}.\alpha^m]}{\overline{m-1}.N + \overline{m+1}\alpha^m} \ldots (13)$$

Sia proposto di determinare $\sqrt[5]{231554007}$.

Cerco nella tavola delle potenze il n.° la cui potenza 5.ª più si accosta al n.° dato e trovo 229345007 ($= 47^5$). Fo $\alpha = 47$, $m = 5$, $N = 231554007$ e per calcolare la formola esprimente x deduco

$$N-\alpha^5 = \left\{\begin{array}{r} 231554007 \\ -229345007 \end{array}\right\} = 2209000,$$

$$2\alpha(N-\alpha^5) = 94 \times 2209000 = 207646000,$$

$$(5+1)\alpha^5 = 6 \times 229345007 = 1376070042,$$

$$(5-1)N = 4 \times 231554007 = 926216028,$$

ottengo $$x = \frac{207646000}{2302286070} = 0,090191,$$

e però $$\sqrt[5]{231554007} = 47,090191.$$

Per accostarsi più d' appresso al valor vero converrebbe supporre $a = 47,1$. (1)

Cercando $\sqrt[5]{161900}$ si trova $R = 11,0115731$. (1)..

* §. 99. Teor. Essendo N un n.° intiero non può supporsi che sia (1) . . . $\sqrt[m]{N} = a + \frac{b}{c}$, dove b, c sien n.i finiti e primi fra loro. Dim.ne L' eq. (1) equivale ad

$$N = a^m + ma^{m-1}\frac{b}{c} \ldots + ma\frac{b^{m-1}}{c^{m-1}} + \frac{b^m}{c^m},$$

e questa, moltiplicando tutto per c^{m-1} dà

$$(2) \ldots \frac{b^m}{c} = Nc^{m-1} - a^m c^{m-1} - m a^{m-1} b c^{m-2} \ldots - mab^{m-1}.$$

Ma il 2.° membro è un n.° intiero ed il 1.° un n.° frazionario, perchè c non si trova in alcuno de' fattori b, b, b ec. componenti il numeratore, ed è assurda l' eguaglianza di due n.i uno de' quali sia intiero, l'altro frazionario: Dunque è assurda l'eq. ipotetica $\sqrt[m]{N} = a + \frac{b}{c}$.

Se $m = 2$ l' eq. finale (2) si riduce a

$$\frac{b^2}{c} = (N - a^2)c - 2ab.$$

(1) É facile verificare che anche la formola (13) non é sempre opportuna per l' estrazione delle radici quadrata e cubica: Si trova per es.° $\sqrt{8} = 3 - x = 3, -0,171428 = 2,828572$, valore che aberra nela 4.a cifra. E vero che facendo $a = 2,828$ si corregge l' errore ma il calcolo diviene troppo laborioso. Limitandoci all' ipot. $a = 2,8$ e volendo 6 decimali esatte bisognano due nuove sostituzioni, e dopo tanto lavoro non siamo neppur sicuri di aver conseguito l' esatto valore di tutte le decimali che si volevano.

Ci sarà utile nella discussione delle risolventi relative ad alcuni probl. geometrici, il seg.

Teor. Se $\sqrt[m]{[a^m+b]}=a+\delta$, indicando $\sqrt[m]{[(a+k)^m+b]}$ per $a+k+\delta'$ è $\delta'<\delta$, e δ' diminuisce a misura che si aumenta uno de' n.i k, m.

Infatti si ha $b=ma^{m-1}\delta+m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}\delta^2 \ldots+\delta^m$

$$b=m(a+k)^{m-1}\delta'+m\frac{(m-1)}{2}(a+k)^{m-2}\delta'^2 \ldots+\delta'^m$$

ed il 2.° membro di questa non può equivalere a quello dell'eq. antec. se non sia $\delta'<\delta$; e siccome l'aumento di m o di k ne produce uno ne' coefficienti di δ', ne segue ec.

* §. 100. Quando la soluzione di un probl. dipende da un'eq. della forma $x^2=a\pm\sqrt{b}$, essendo a, b espressioni letterali date, si dee cercare con un adattato metodo l'espressione di $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$ sotto una forma algebrica finita, e s'ella non esiste si riserba l'uso della formola $x=\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$ ai casi pratici, ne'quali essendo noto il valore delle quantità letterali componenti a, b, la questione si riduce ad estrarre la radice quadrata da un binomio numerico della forma $a\pm\sqrt{b}$; binomio che sovente ammette la radice sotto la semplicissima forma $z\pm\sqrt{t}$.

Qualunque sia l'espressione $a\pm\sqrt{b}$, cioè algebrica o numerica, si ha una soluzione più semplice e più esatta qualora riesca di trovare

$x\ [=\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}\ ]=z\pm\sqrt{t}$, perchè si evita la 2.ª estrazione della radice, la quale oltre di essere incomoda ha il difetto d'indebolire l'approssimazione.

Osserv. I. Un n.° della forma $a\pm\sqrt{b}$ può essere un quadrato.

Infatti $\begin{cases}(a_{,}\pm\sqrt{b_{,}})^2=a_{,}^2+b_{,}\pm 2a_{,}\sqrt{b_{,}},\\ (\sqrt{a_{,}}\pm\sqrt{b_{,}})^2=a_{,}+b_{,}\pm 2\sqrt{(a_{,}b_{,})},\end{cases}$

sono ambedue della forma richiesta giacchè

$$2a_{,}\sqrt{b_{,}}=\sqrt{4a_{,}^2b_{,}}\ \text{ e }\ 2\sqrt{a_{,}b_{,}}=\sqrt{4a_{,}b_{,}}.$$

Osserv. II. Qualunque sia il binomio $a\pm\sqrt{b}$, la più semplice e generale espressione di $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$ è necessariamente di una delle forme:

$$a_{,}\pm\sqrt{b_{,}}\ ;\ \sqrt{a_{,}}\pm\sqrt{b_{,}}.$$

Infatti 1.° se la radice non contenesse un termine irrazionale quadratico, un simil termine non potrebbe trovarsi nel suo quadrato: 2.° Se la radice contenesse un termine affetto da $\sqrt[n]{k}$, anche il suo quadrato conterrebbe il fattore $\sqrt[n]{k}$ contro l'ipot. 3.° la radice non può essere della forma

$$a\pm\sqrt{a_{,}}\pm\sqrt{b_{,}}\ \text{perchè}\ (a\pm\sqrt{a_{,}}\pm\sqrt{b_{,}})^2$$

contiene tre termini irrazionali distinti, a motivo che $\sqrt{a_{,}}$, $\sqrt{b_{,}}$ si suppongono irreduttibili ad una comune forma $m\sqrt{p}$.

Ciò posto si faccia $(\sqrt{a}+\sqrt{b})=z+\sqrt{t}$, dove z, t sono due n.[i] da determinarsi. Si farebbe $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=z-\sqrt{t}$.

Alzando al quadrato l'uno e l'altro membro si ottiene

$$a+\sqrt{b}=z^2+2z\sqrt{t}+t$$

ossia $$a-z^2-t=2z\sqrt{t}-\sqrt{b}:$$

Ma una quantità razionale non può eguagliarne una irrazionale: dunque l'uno e l'altro membro dee svanire per se stesso e però

$$a=z^2+t,\ \sqrt{b}=2z\sqrt{t}.$$

Dalla 2.[a] $z^2=\frac{b}{4t}$: la 1.[a] diviene $4t^2-at+b=0$

e dà (89) $t={}^1/_2(a\pm\sqrt{a^2-b})$:

quindi $z(=\sqrt{a-t})=\sqrt{[{}^1/_2(a\mp\sqrt{a^2-b})]}$, e però

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{[{}^1/_2(a-\sqrt{a^2-b})]}+\sqrt{[{}^1/_2(a+\sqrt{a^2-b})]}\ldots(14)$$ (1)

formola che esige 7 operazioni, ma che si riduce alla comoda e vantaggiosa forma $z+\sqrt{t}$ qualora a^2-b sia un quadrato, e tale sia uno de' due n.[i] ${}^1/_2(a\pm\sqrt{a^2-b})$.

Per l'immediata valutazione di $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ bastano tre sole operazioni ma il risultamento

(1) Si vedrà che l' ipot. $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{z}+\sqrt{t}$ conduce al medesimo risultamento.

offre un' approssimazione assai debole perchè la 3.ª operazione si effettua su di una quantità approssimata.

La sola condizione che a^2-b sia un quadrato non basta per rendere la formola (14) completamente vantaggiosa, e se i n.i

$\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-b})$ sieno frazionarj ella è assolutamente inopportuna. In tal caso è falso che la predetta formola sia, com' è stato asserito da un moderno Autore, più semplice della proposta $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Cercandosi per es.° $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, come fa l' Autore citato, si trova

$$a^2-b=1\text{, e } \sqrt{(2+\sqrt{3})}=\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\text{ ,}$$

cioè un risultamento più incomodo di $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$. All' opposto se cercasi $\sqrt{(7+4\sqrt{3})}$, siccome

$$a^2-b=49-48=1\text{ , ed } \tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})=\tfrac{7+1}{2}=2^2\text{ ,}$$

$$\text{si ha } \sqrt{(7+4\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}.$$

Combinando questo risultamento col prec. si scuopre essere

$$\sqrt{3/2}+\sqrt{1/2}=\sqrt[4]{(7+4\sqrt{3})}.$$

La formola è anche più inopportuna e disavvantaggiosa se niuno de' due criterj sopra stabiliti si verifichi. Così per rapporto a $\sqrt{(7+\sqrt{112})}$ si ha

$$a^2-b=-63\text{, } \tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-b})=\tfrac{1}{2}(7 \pm \sqrt{-63})\text{ ,}$$

$$\text{e} \sqrt{(7+\sqrt{112})}=\sqrt{(7/2+3/2\sqrt{-7})}+\sqrt{(7/2-3/2\sqrt{-7})}$$

Il metodo esposto può applicarsi ai polinomj. Vogliasi

$$\sqrt{[\alpha^2 - \alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2 + 2\sqrt{(\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 + \tfrac{1}{4}\alpha\beta^3)}]}.$$

Siccome $a^2 - b = (\alpha^2 - 3\alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2)^2$,

$$\tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b}) = \tfrac{1}{2}[\alpha^2 - \alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2 - (\alpha^2 - 3\alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2)] = \alpha\beta,$$

$$\tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b}) = \tfrac{1}{2}[\alpha^2 - \alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2 + \alpha^2 - 3\alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2] = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2$$

la radice si trova $= \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \tfrac{1}{4}\beta^2)}$.

Qual è la radice quadrata di

$$4\alpha\beta + \sqrt{[-4(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2]}?$$

Risp. $\alpha + \beta + (\alpha - \beta)\sqrt{-1}$.

* §. 101. Un binomio della forma $a + \sqrt{b}$ può essere il cubo di un simile binomio $a_, + \sqrt{b_,}$; basta che sia

$$a_,^3 + 3a_, b_, = a, \quad (3a_,^2 + b_,)\sqrt{b_,} = \sqrt{b}.$$

Siccome la radice cubica della forma $a_, + \sqrt{b_,}$ è preferibile all' immediata valutazione di $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})}$, e questa ricerca essenzialmente appartiene alla teorica del calcolo algebrico, noi passiamo ad occuparcene.

Esclusa la forma $\sqrt{z} + \sqrt{t}$, la quale, per essere i suoi termini irreduttibili come si suppone, porterebbe nel cubo due termini irrazionali distinti, facciasi per maggior comodo

$$\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = \tfrac{1}{2}(z + \sqrt{t}).$$

La potenza cubica ed il confronto delle respettive quantità razionali e delle irrazionali dà

$$8a=z^3+3tz \ldots (1)\ ;\ 8\sqrt{b}=(3z^2+t)\sqrt{t}:$$

quindi

$$(8a)^2=z^6+6tz^4+9t^2z^2;(8\sqrt{b})^2=9tz^4+6t^2z^2+t^3,$$

e però $(8a)^2-(8\sqrt{b})^2=(z^2-t)^3$ ossia $z^2-t=4\sqrt[3]{(a^2-b)}$.

Affinchè la radice cubica di $a+\sqrt{b}$ sia sotto l'ipotetica forma $\frac{1}{2}(z+\sqrt{t})$ fa d'uopo che $t(=z^2-4\sqrt[3]{a^2-b})$ sia razionale, cioè che a^2-b sia un cubo c^3. Se ciò si verifica si ponga z^2-4c per t in (1), e la trasformata

$$z^3-3cz-2a=0 \ldots (2)$$

dovrà avere almeno una risolvente razionale. Vedremo a suo luogo come dalla prec. eq. si deduca il richiesto valore di z quando esiste. Intanto, siccome $t=z^2-4c$, apparisce che la definitiva determinazione della radice $\frac{1}{2}(z+\sqrt{t})$ dipende da tre condizioni: 1.° che sia $a^2-b=c^3$; 2.° che esista una risolvente razionale dell'eq.(2): 3.° che sia $z^2>4c$.

* §. 102. L'estrazione della radice quarta da un binomio numerico della forma $a+\sqrt{b}$ è assai più facile. Supponendo infatti

$$\sqrt[4]{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{z}+\sqrt{t}$$

e facendo la potenza 4.ª si ha mediante il solito confronto

$$\text{I} \ldots\ a=z^2+6tz+t^2\ ,\quad \sqrt{b}=4(t+z)\sqrt{tz}\ ,$$

e perchè $a^2=z^4+12tz^3+2t^2z^2+12t^3z+36t^2z^2+t^4$

$$=z^4+12(tz^3+t^3z)+38t^2z^2+t^4$$

e $\quad b=16(tz^3+2t^2z^2+t^3z)$

risulta $a^2-b=(z-t)^4$ e $z=t+\sqrt[4]{(a^2-b)}=t+d$,

dove si suppone d la radice 4.ª esatta di a^2-b.

Sostituita la prec. espressione di z nell' eq. I si ritrae

$$8t^2+8dt+d^2=a \text{ e } t={}^1\!/_2\left[-d+\sqrt{\left(\frac{a+d^2}{2}\right)}\right];$$

$$\text{cioè } t={}^1\!/_2\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt[4]{(a^2-b)}\right],$$

$$z={}^1\!/_2\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt[4]{(a^2-b)}\right]$$

Quattro sono dunque le condizioni che debbono restare soddisfatte perchè il binomio $a+\sqrt{b}$ ammetta la radice 4.ª della forma $\sqrt{z}+\sqrt{t}$, (forma che abbraccia l'altra $z+\sqrt{t}$) e sono

$$a^2>b)\, a^2-b=d^4\ ,\quad \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}=e^2\ ,\ e>d.$$

Se tutte si verificano si ha

$$\sqrt[4]{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\left\{{}^1\!/_2\left[\sqrt[4]{a^2-b}+\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}\right]\right\}}+$$
$$\sqrt{\left\{{}^1\!/_2\left[-4\sqrt[4]{a^2-b}+\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}\right]\right\}}$$

Volendosi per es.° $\sqrt[4]{(49+\sqrt{2400})}$ si deduce

$a^2-b=\overline{49}^2-2400=2401-2400=1$, $\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}=25$

$z=\frac{1}{2}(1+5)=3$, $t=\frac{1}{2}(-1+5)=2$ e però

$$\sqrt[4]{(49+\sqrt{2400})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Così $\sqrt[4]{(97+\sqrt{9408})}=2+\sqrt{3}$.

* §. 103. Facendo $\sqrt[2n+1]{(a+\sqrt{b})}=z+\sqrt{t}$ ...(1) si ottiene

$$(15)...a=z^{2n+1}+\frac{(2n+1)2n}{1.2}z^{2n-1}t+\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3.4}z^{2n-3}t^2 \text{ ec.}$$

$$\sqrt{b}=\sqrt{t}\left(\frac{(2n+1)}{1}z^{2n}+\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1,2.3}z^{2n-2}t^2 \text{ ec.}\right)$$

cioè $a=\frac{1}{2}[(z+\sqrt{t})^{2n+1}+(z-\sqrt{t})^{2n+1}]$

$$\sqrt{b}=\frac{1}{2}[(z+\sqrt{t})^{2n+1}-(z-\sqrt{t})^{2n+1}].$$

Quindi $a^2-b=\frac{1}{4}[(z+\sqrt{t})^{4n+2}+4(z^2-t)^{2n+1}+(z-\sqrt{t})^{4n+2}$
$-(z+\sqrt{t})^{4n+2}-(z-\sqrt{t})^{4n+2}]$

$$=(z^2-t)^{2n+1}\text{, e però } z^2=t+\sqrt[2n+1]{(a^2-b)}=t+h.$$

Con questa si elimini t dall'eq. (15) e la trasformata dovrà avere almeno una risolvente razionale soddisfacente al quesito, e tale che sia $z^2>h$.

Egualmente si trova che per determinare

$$\sqrt[2n]{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{z}+\sqrt{t}\ ...\ (2)$$

dev' essere $z = t + \sqrt[2n]{(a^2 - b)} = t + k$, cioè $a^2 - b$ una potenza dell' ordine $2n$, La sostituzione di $z - k$ per t nell' eq. (16), di $2n$ per $2n + 1$ e di $\sqrt{z}$ per z, dà un' eq. del grado n in z, che dee avere almeno una risolvente razionale.

* §. 104. Alcuni fra i moderni Autori di elementi algebrici in vece dell' eq.i ipotetiche (1). (2) assumono

$$\left\{ \sqrt[2n+1]{(a + \sqrt{b})} = (z + \sqrt{t}) \sqrt[2n+1]{m};\ \sqrt[2n]{(a + \sqrt{b})} = (\sqrt{z} + \sqrt{t}) \sqrt[2n]{m} \right\} \ldots (3)$$

dove m è una nuova indeterminata.

Noi osserviamo 1.° Che le nuove ipotesi, siccome equivalenti a

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a + \sqrt{b}}{m}} = z + \sqrt{t},\quad \sqrt[2n]{\frac{a + \sqrt{b}}{m}} = \sqrt{z} + \sqrt{t},$$

si riferiscono ai casi ne' quali $a + \sqrt{b}$ non è un' esatta potenza dell' ordine richiesto: Infatti se si suppone $m_{\prime}$ un moltiplicatore numerico che renda il n.° $m_{\prime}(a + \sqrt{b})$ una potenza $(2n + 1)^{esima}$ onde sia $\sqrt[2n+1]{[m_{\prime}(a + \sqrt{b})]} = z + \sqrt{t}$, risulta $a + \sqrt{b} = \frac{1}{m_{\prime}} (z + \sqrt{t})^{2n+1}$: pongasi m pel n.° indeterminato $\frac{1}{m_{\prime}}$ ed estraendo la radice $(2n + 1)^{esima}$ si avrà $\sqrt[2n+1]{a + \sqrt{b}} = (z + \sqrt{t}) \sqrt[2n+1]{m}$.

2.° Che la determinazione di m unicamente dipende da un fallace tentativo, il cui scopo è di trovare per m un valore che renda razionale il 2.° membro delle respettive eq.^{i}

$$z^2 = t + \sqrt[2n+1]{\frac{a^2-b}{m^2}} \quad , \quad z = t + \sqrt[2n]{\frac{a^2-b}{m^2}} \quad ,$$

e sia tale inoltre, che sostituendo per t nell'eq.(16)

$$z^2 - \sqrt[2n+1]{\frac{a^2-b}{m^2}} \text{ nel 1° caso}, \quad z - \sqrt[2n]{\frac{a^2-b}{m^2}} \text{ nel 2.°},$$

si abbia una risultante affetta da una o più risolventi razionali.

3.° Che i valori

$$m = \sqrt{a^2-b}, \; m = (a^2-b)^{\frac{2n+2}{2}}, m = (a^2-b)^{\frac{-(2n+2)}{2}}$$

per la 1.^{a} ipotesi: ed i valori

$$m = \sqrt{a^2-b}, \; m = (a^2-b)^{\frac{\mp 2n+1}{2}} \text{ per la 2.}^a$$

mentre soddisfanno alla 1.^{a} condizione hanno ben di rado la prerogativa di soddisfare alla 2.^{a} : talvolta uno di essi soddisfa all'una ed all'altra, ma il risultamento non comparisce sotto una forma opportuna.

4.° Che per appurare il 2.° membro delle formole (3) si richiede un calcolo più laborioso di quello con cui si procede all'immediata valutazione di $\sqrt[2n+1]{(a+\sqrt{b})}, \sqrt[2n]{(a+\sqrt{b})}$.

Vogliasi per es.° la radice 4.^{a} del binomio $14+8\sqrt{3}$ che non è un'esatta potenza 4.^{a} perchè tale non è $\overline{14}^2-8^2.3$ ossia $196-192=4$.

Per soddisfare all'eq. $\sqrt[4]{\frac{a^2-b}{m^2}}=k$ ossia $\sqrt[4]{\frac{4}{m^2}}$ suppongo $m=\sqrt{a^2-b}=2$ e trovo $k=1$, $z=-\frac{1}{2}$, $t=-\frac{3}{2}$, cioè la radice non ammissibile $(\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{3}{2}})\sqrt[4]{2}$.

Fo $m=(a^2-b)^{\frac{4+1}{2}}=32$ ed ottengo $k=\frac{1}{4}$: l'eq. (15) si riduce alla seg. forma

$$14=32\,[z^2+6z(z-\tfrac{1}{4})+(z-\tfrac{1}{4})^2]$$

ossia $z^2-\frac{1}{4}z=\frac{3}{64}$: quindi

$$z=\tfrac{1}{8}+\sqrt{(\tfrac{3}{64}+\tfrac{1}{64})}=\tfrac{3}{8},\ b=\tfrac{3}{8}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{8}$$

e però si ha la radice 4.ª espressa per

$$(\sqrt{\tfrac{3}{8}}+\sqrt{\tfrac{1}{8}})\sqrt[4]{32},$$

che è una formola molto più incomoda della proposta. Ciò prova la verità dell'osservazione fatta nel n.° 3.° Pongasi finalmente $m=(a^2-b)^{\frac{-4+1}{2}}=\frac{1}{8}$. Risulta $k=4$, l'eq. (15) si cangia in

$$14.8=z^2+6z(z-4)+(z-4)^2$$

ossia $z^2-4z=12$ e dà

$$z=2+\sqrt{12+4}=6,\ t(=z-k)=2$$

e però $(\sqrt{z}+\sqrt{t})\sqrt[4]{m}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt[4]{1/8}$

Essendo anche questa formola notabilmente laboriosa giova rivolgersi al tentativo. L'ipotesi di $m=1/4$ dà

$$\sqrt[4]{\frac{a^2-b}{m^2}}=\sqrt[4]{16}=2=k:$$

l'eq.(15)cioè $z^2-2z-3=0$ dà $z=3$, $t=1$, e si ha

$$\sqrt[4]{(14+\sqrt{192})}=(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{2}.$$

Dopo un sì lungo calcolo, e perchè il tentativo è riuscito felicemente, rimane da estrarsi una radice quadrata ed una radice quarta, e da farsi poi una fastidiosa moltiplicazione, mentre operando sulla formola proposta basta l'estrazione dell'una e l'altra radice. Non sembra d'altronde che la formola $(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{2}$ prometta un valore più approssimato di quello che può ricavarsi dalla stessa formola data.

§. 105. Evvi un artifizio per ottenere quando esiste, sotto una forma finita la radice quadrata di un polinomio numerico, i cui termini sieno tutti meno uno affetti da irrazionalità quadratica.

Sia per maggior chiarezza il quadrinomio $a+b+c+d$, e supponghasi che i suoi termini sieno tutti o tutti meno uno affetti da $\sqrt{}$.

Due termini numerici razionali equivalgono ad uno e però si prescinde da questo caso. Siccome $(a+b+c+d)^2$ è $=$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

e $\frac{2ab\times 2ac}{2bc}=2a^2$, $\frac{2ab\times 2bc}{2ac}=2b^2$, $\frac{2ac\times 2bc}{2ab}=2c^2$, $\frac{2bd\times 2cd}{2bc}=2d^2$

si moltiplichino l'uno per l'altro due termini irrazionali, ed il prodotto si divida per un nuovo termine irrazionale, atto a dare un quoziente razionale: si ripeta lo stesso in tutte le maniere capaci di produrre un quoziente diverso: si estragga la radice quadrata dalla metà di ciascun quoziente e si avrà ec.

Volendosi per es.° $\sqrt{(14-2\sqrt{18}+2\sqrt{27}-2\sqrt{6})}$ si deduce

$\frac{2\sqrt{18}\times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{27}}=2\sqrt{4}=4$; $\frac{2\sqrt{18}\times 2\sqrt{27}}{2\sqrt{6}}=18$, $\frac{2\sqrt{27}\times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{18}}=6$

Dunque $\sqrt{2}, 3, \sqrt{3}$ sono i termini della radice; e siccome

$\sqrt{27}=3\times\sqrt{3}=-3\times-\sqrt{3}$ e $-\sqrt{6}=\sqrt{2}\times-\sqrt{3}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

si vede che la radice dev'essere $3-\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

ovvero $-3+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Si sarebbe ottenuto lo stesso deducendo $\sqrt{14}=3$ e dividendo per 6 il binomio

$-2\sqrt{18}+2\sqrt{27}$ ossia $-6(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

CAPITOLO VII.

Proporzioni, Progressioni e Facoltà Numeriche.

§. 106. Quando si hanno quattro quantità a, b, c, d, tali che sia $b-a=d-c$, dicesi impropriamente ch' esse formano una proporzione *aritmetica*, e suole indicarsi scrivendo

$$\div a . a \pm d .\!\cdot\!. \; c . c \pm d.$$

Quindi $a + (c \pm d) = (a \pm d) + c$, cioè *la somma de' medj eguale a quella degli estremi.*

Se in $\div a . b .\!\cdot\!. \; c . d$ è $c=b$ si ha $b = \frac{1}{2}(a+d)$ e la proporzione è *continua*; $\frac{1}{2}(a+d)$ dicesi medio aritmetico fra a e d.

La formola delle proporzioni geometriche è $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ossia $bc=ad$; e suole anche indicarsi scrivendo

$$\div\!\div a : b :: c : d.$$

Siccome può sempre trovarsi un n.° $r \left(= \frac{b}{a}\right)$ tale che risulti $ar=b$, possiamo sostituire ar per b, cr per d e scrivere

$$\div\!\div a : ar :: c : cr,$$

dove $ar \times c = a \times cr$ (17) ed r è la *ragione*.

La proporzione è *continua* se ar ossia b, è $= c$ (§. cit.) e si ha $c =) \sqrt{ad}$ (medio geometrico fra a e d).

Aggiugendo $4ad$ da ambe le parti, il rapporto generalmente vero $(a-d)^2 > 0$ si cangia in $(a+d)^2 > 4ad$ e dà $\frac{1}{2}(a+d) > \sqrt{ad}$: Dunque *il medio aritmetico fra due dati n.i a, d, è maggiore del medio geometrico fra gli stessi n.i*

Due quantità x, y che insieme crescono o diminuiscono in guisa, che il loro quoziente rimanga lo stesso, stanno fra loro in ragione semplice *diretta*. Ciò talvolta si esprime con l'eq. $x = y$.

Il rapporto d'x ad y dicesi *inverso* o *reciproco* quando x non può divenire mx senza che y divenga $\frac{y}{m}$, e viceversa. Ciò s'indica con l'eq. $xy = a$, e si verifica per es.° nel caso che una cosa si divida in parti uguali con divisioni diverse, poichè la grandezza delle parti sta in ragione inversa del n.° delle parti stesse.

Nell'ipot. che la y successivamente diminuisca fino ad esser minore di qualsivoglia quantità assegnabile, cioè infinitesima, la x diventa maggiore d'ogni quantità assegnabile ossia infinita. In tal caso gli analisti sostituiscono all'eq. $xy = a$ il simbolo $\infty . 0 = a$.

Per significare che x varia nella ragione diretta composta delle quantità t, y, e nella ragione inversa, semplice di u, duplicata di z, si scrive $x = \frac{ty}{uz^2}$.

§. 107. Le principali modificazioni di cui una proporzione geometrica è capace sono.

I	$a : ar :: c : cr$....	propor. princip.
	$a : c :: ar : cr$....	*alternazione.*
II	$ar : a :: cr : c$...	*inversione.*
III	$a+ar \begin{cases} : a \\ : ar \end{cases} :: c+cr \begin{cases} : c \\ : cr \end{cases}$...	*composizione.*(1)
IV	$a-ar \begin{cases} : a \\ : ar \end{cases} :: c-cr \begin{cases} : c \\ : cr \end{cases}$...	*divisione.*
V	$a : a-ar :: c : c-cr$....	*conversione.* (2)
VI	$a-ar : a+ar :: c-cr : c+cr$...	

É legittima qualunque modificazione che conserva l'eguaglianza fra la respettiva somma se le proporzioni sieno aritmetiche, fra il respettivo prodotto de' medj e degli estremi se sieno geometriche. Si ha per es.°

$$a^{\frac{p}{q}} : (ar)^{\frac{p}{q}} :: c^{\frac{p}{q}} : (cr)^{\frac{p}{q}} \quad (3)$$

Le due prime modificazioni sono applicabili alle proporzioni aritmetiche.

§. 108. Avendosi due terne di n[i] per es.°

24, 12, 4 ; 18, 9, 3:

tali che il rapporto geometrico del 1.° al 2.° e del 2° al 3° sia respettivamente lo stesso nell'una

(1) La composizione propriamente detta é la 1.ª del n.° III: dicasi lo stesso della divisione.

(2) Queste denominazioni s'incontrano nelle antiche opere geometriche e però non conviene ignorarle.

(3) Si eccettua il caso che q sia n.° pari ed i medj o gli estremi sieno negativi. Infatti non è $\sqrt{a} : \sqrt{-ar} :: \sqrt{-c} : \sqrt{cr}$ perchè $\frac{\sqrt{-ar}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{cr}}{\sqrt{-c}}$ equivale a $\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ cioè a $2 = 0$

e nell'altra, si può argomentare che il 1.° stà al 3.° nella 1.ª terna come il 1.° al 3.° nella 2.ª, e ciò dicesi *argomentare dall'eguaglianza ordinata*. Ma se da una parte sta il 1.° n.° al 2.° come il 2.° al 3.° dall' altra, il rapporto del 2.° al 3.° termine nella 1.ª terna essendo lo stesso che quello del 1° termine al 2° nella 2ª, il che si verifica per es.° in

24, 12, 4 ; 18, 6, 3,

si argomenta dall' eguaglianza perturbata dicendo che nella 1.ª terna sta il 1.° n.° al 3.° come il 1.° al 3.° nella 2.ª. Vale lo stesso se i dati rapporti sieno aritmetici.

La 1.ª argomentazione può verificarsi per es.° nelle terne

12, 8, 5 ; 18, 14, 11,

La 2.ª nelle terne

12, 8, 5 ; 18, 15, 11.

§. 109. Nell' ipot. di $b>c$ se s'istituisce la proporzione

$$a+b : a+c :: b : x$$

risulta $x=\frac{(a+c)b}{a+b}>c$ e $<b$. Infatti il 1.° rapporto equivale ad $ab>ac$ ossia $b>c$; il 2.° si riduce a $bc<b^2$ cioè $c<b$.

Dunque se ad un n.° a. successivamente si aggiungono due n.ⁱ $b, c\ (<b)$, la ragione $a+b : a+c$ é $<b : c$. Sia per es.° $a=10$, $b=7$, $c=5$ e sarà $17 : 15 < 7 : 5$ ossia ${}^{17}/_{15} < {}^{7}/_{5} (= {}^{21}/_{15})$.

Questa proposizione è la 1.ª fra quelle di *Gaspero Bachet* su i *Porismi* di *Diofanto*.

§. 110. Essendo a il massimo termine in $a:ar::c:cr$ si ha $r<1$ ed $a+cr>ar+c$. Di fatto il prec. rapporto equivale ad $a(1-r)>c(1-r)$ ossia $a>c$.

È questa la proposizione XXV del lib. V di *Euclide*.

§. 111. Se due n.ⁱ A, B stanno nella ragione composta di $a:b$; di $c:d$, di $e:f$, cioè se $A:B::ace:bdf$, si ha $c:d$ (e lo stesso dicasi di ciascuno de' rapporti $a:b$, $e:f$) nella ragione diretta di $A:B$ e nella reciproca composta di $a:b$ e di $e:f$.

Basta osservare che sussiste la proporzione

$$c:d::Abf:Bae.$$

Il P. *Grandi* avverte nel suo Trattato del *movimento dell'acque*. p. 14, che la prec. proposizione merita il titolo di *elementare*.

§. 112. Se due proporzioni geometriche hanno gli antecedenti o i conseguenti comuni, i termini diversi di una sono direttamente proporzionali a quelli dell'altra: la proporzionalità diviene inversa se i termini comuni sono i medj o gli estremi. Ciò si verifica immediatamente. Sia per es.° $a:b::c:d$; $a:b_{,}::c:d_{,}$ Risulta

$$a=\frac{bc}{d}=\frac{b_{,}c}{d_{,}} \text{ e però } bd_{,}=b_{,}d.$$

L'ordinato prodotto di più proporzioni geometriche e l'ordinata somma di più propor-

zioni aritmetiche costituisce una proporzione geometrica nel 1.° caso, aritmetica nel 2.°

Sia $\div a : ar :: c : cr$; $\div a_, : a_, r_, :: c_, : c_, r_,$

e si avrà $aa_, : aa_, rr_, :: cc_, : cc_, rr_,$;

così se $\div a . a+d . \because b . b+d$., $\div a_, . a_, + d_, \because b_, . b_, + d_,$

risulta $\div a+a_, . a+a_, +d+d_, \because b+b_, . b+b_, +d+d_,$.

Rappresentando la respettiva ragione delle proporzioni geometriche componenti per

$r, r_,, r_{,,}, \ldots r_{(n)}$

quella delle aritmetiche per $d, d_,, d_{,,}, \ldots d_{(n)}$

la ragione della proporzione composta è respettivamente

$= r r_, r_{,,} \cdots r_{(n)}$; $d + d_, + d_{,,} \ldots + d_{(n)}$:

Se $r = r_, = r_{,,} \ldots = r_{(n)}$ sussiste

$a + a_, + a_{,,} \ldots + a_{(n)} : ar + a_, r_, + a_{,,} r_{,,} \ldots + a_{(n)} r_{(n)} :: a : ar :: c : cr$ ec.

vale a dire, che avendosi qualunque n.° di proporzioni geometriche omogenee, *sta la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente, o come* $1 : r$.

§. 114. Un seguito di quantità numeriche o letterali A, B, C, D ec. per rapporto alle quali si abbia

$$A - B = B - C = C - D \text{ ec.}$$

costituisce una *progressione aritmetica* o *equidifferente*, che qualora sia $B<A$, $C<B$ ec. è *convergente*, se viceversa *divergente*. La sua formola è

$$a \,.\, a \pm d \,.\, a \pm 2d \ldots . a \pm (n-2)\, d \,.\, a \pm (n-1) d.$$

Dicasi s la somma di n termini, t l' n.esimo cioè $a \pm (n-1)\, d$, e siccome scrivendo

$$a,\ a \pm d,\quad a \pm 2\, d, \ldots . a \pm (n-2)\, d, t$$

$$t, a \pm (n-2) d, a \pm (n-3) d,\quad a \pm d,\quad a$$

ciascuna coppia verticale risulta $= a + t$ (il che prova *essere la somma degli estremi eguale a quella di due termini da essi equidistanti*) ed il n.° delle coppie è $= n$, si ha la somma della doppia progressione, cioè $2s = (a + t) n$ è però

$s = (a + t)\frac{n}{2}$. Questa eq. combinata con

$t = a \pm (n-1)\, d$ determina due degli elementi a, d, n, s, t, quando ne sieno dati tre: ma tre possono darsi in 10 maniere (59), ed ogni maniera corrisponde a due incognite: dunque sono 20 i probl. a cui si soddisfa eliminando un elemento ignoto tra l' eq.i

$$\left\{ t = a + (n-1)\, d,\quad s = (a + t)\frac{n}{2} \right\} \ldots . . (16)$$

e ricavando l' altro dall' eq. finale. Si dà il nome di *termine generale* all' n.esimo t, di *somma generale* alla somma s. Facendo $n = 1$, 2 ec.

t dà tutti i termini della progressione cominciando dal 1.° ; s dà la somma di tanti termini quante unità si sono sostituite per n. Ecco per ordine i risultamenti di tutte le combinazioni che possono aversi prendendo tre degli elementi a, d, n, t, s.

Elem. dati	incogn.	
d, n, t		$a = t - (n-1)\,d$
n, t, s		$a = \frac{2s}{n} - t$
n, d, s	a	$a = \frac{s}{n} - (n-1)\,\frac{d}{2}$
d, t, s		$a = \frac{1}{2}\left\{d \pm \sqrt{4(t^2 + dt - 2ds) + d^2}\right\}$
a, d, n		$t = a + (n-1)\,d$
a, n, s	t	$t = \frac{2s}{n} - a$
n, d, s		$t = \frac{s}{n} + (n-1)\,\frac{d}{2}$
a, d, s		$t = \frac{1}{2}\left\{-d \pm \sqrt{4(a^2 - ad + 2ds) + d^2}\right\}$
a, d, t		$n = 1 + \frac{t-a}{d}$
a, t, s		$n = \frac{2s}{a+t}$
a, d, s	n	$n = -\frac{1}{2}\left\{\frac{2a-d}{d} \pm \sqrt{4 \times 2ds - \frac{(2a-d)^2}{d^2}}\right\}$
d, t, s		$n = \frac{1}{2}\left\{\frac{2t+d}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{d}\right)^2 - 4 \times \frac{2s}{d}}\right\}$ (*)
a, n, t		$d = \frac{t-a}{n-1}$
a, n, s	d	$d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}$
n, t, s		$d = \frac{2(nt-s)}{n(n-1)}$
a, t, s		$d = (t^2 - a^2) : (2s - a - t)$
a, n, t		$s = (a+t)\,\frac{n}{2}$
a, d, n	s	$s = [2a + (n-1)\,d]\,\frac{n}{2}$
d, n, t		$s = [2t - (n-1)\,d]\,\frac{n}{2}$
a, d, t		$s = \frac{1}{2}(a+t) + \frac{t^2 - a^2}{2d}$

(*) Se trovasi $n = h + \frac{i}{l}$ ciò vuol dire che il n.° de' termini è $= h$ più una parte $\frac{i}{l}$ del termine $(h+1)$.esimo

La formola 18.ª dimostra 1.° che la somma $1+3+5+7$ ec., limitando la progressione ovunque piaccia, è sempre un quadrato. Infatti sostituendo 1 per a e 2 per d risulta $s=n^2$: 2.° Che tal quadrato è quello del n.° che indica quanti termini si sono sommati: 3.° Che ogni quadrato in n.ⁱ intieri, è composto di tanti n.ⁱ dispari quante sono le unità contenute nella sua radice quadrata: 4.° Che facendo $n=m^2$, la somma di cui sopra eguaglia la potenza 4.ª di m.

§. 115. Per inserire fra due dati n.ⁱ α, β, un n.° m di medj proporzionali aritmetici, si ponga nella 1.ª dell' eq.ⁱ (16) $a=\alpha$, $t=\beta$, $n=m+2$, se ne deduca

$$d\left[=\frac{t-a}{n-1}\right]=\frac{\beta-\alpha}{m+1}$$

e si avrà

$$\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{m+1},\ \alpha+\frac{2(\beta-\alpha)}{m+1},\ \ldots\ \alpha+\frac{m(\beta-\alpha)}{m+1},\ \beta$$

Essendo per es.° $\alpha=1$, $\beta=16$, $m=3$ si ottiene

$$1,\ 4\tfrac{3}{4},\ 8\tfrac{1}{2},\ 12\tfrac{1}{4},\ 16$$

§. 116. Le progressioni aritmetiche in cui la differenza è uguale al minimo termine, cioè $d=a$, sono dotate di molte proprietà con lungo studio rintracciate dagli antichi Geometri (*), dai moderni, come oggetto di vana speculazione

(*) Veggasi l'appendice di *Gaspero Bachet* al libro su i numeri poligoni di *Diofanto*

intieramente trascurate. Noi crediamo degne d'osservazione le tre seguenti:

1.° Nelle anzidette proporzioni è $s = \frac{1}{2}(n+1)t$

2.° Si ha $nt < 2s$ e $> 2(s-t)$; 3.° e se $a=1$ è $8s+1=q$ (*quadr.*)

Il 1.° risultamento si ottiene sostituendo t per na nella 1.ª formola di s, e costituisce la Prop. XV di *Bachet*: il 2.° serve di fondamento al metodo di *Esaustione* (*) con cui *Archimede* nel libro *De Conoidibus et Sphaeroidibus* determina il volume del paraboloide, e non lo troviamo dimostrato in alcun luogo.

Siccome $t=na$ si ha $nt=n^2 a$;

ma $2s\,[=(a+t)n]=na+n^2 a$ e

$2(s-t)= 2\,(a+\overline{n-1a})\frac{n-1}{2}=na(n-1)=n^2a-na$: Dunque ec.

Per verificare la 3.ª formola basta avvertire che $s=(1+1+n-1)\frac{n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ dà

$$8s+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2.$$

* §. 117. Teor. Distribuendo in tante classi i termini della progressione 1, 3, 5, 7 ec. nella maniera che segue

$$\underbrace{1}_{1^3};\ \underbrace{3,5}_{2^3};\ \underbrace{7,9,11}_{3^3};\ \underbrace{13,15,17,19}_{4^3};\ \underbrace{21,23,25,27,29}_{5^3};\ ec.$$

la somma de' termini delle successive classi forma i respettivi cubi sottoposti. Dim.ne Sia m

(*) Questo ingegnoso metodo è da noi contemplato nel tomo 6.° in un Capit. che ha per titolo *Discussione de' diversi principj da' quali si è desunta la metafisica del Calcolo Differenziale*

il n.° da innalzarsi al cubo. La classe corrispondente contiene m termini in progressione dove la differenza è $=2$. Il 1.° termine essendo nelle prime classi espresso per $m(m-1)+1$ conviene assicurarsi se ciò si verifichi generalmente. A tal effetto suppongasi fatta la verificazione per rapporto ad una data classe m^{esima} ond'ella sia

$$(m-1)m+1,(m-1)m+3,\ldots.(m-1)m+2(m-1)+1$$

cioè $\{m^2-m+1, m^2-m+3, \ldots\ldots m^2+m-1\}\ldots(1)$

Siccome questa dà il 1.° termine della classe $(m+1)^{esima}$ sotto la forma

$$(m-1)m+2(m-1)+3=m^2+m+1=m(m+1)+1$$

resta provato ec.

Assicurati che la progressione (1) è il vero tipo della classe m.^{esima} altro non resta che verificare se la di lei somma s sia$=m^3$, ciò che infatti succede perchè si ha

$$s=\left\{m^2-m+1+m^2+m-1\right\}\frac{m}{2}=m^3.$$

Giova osservare per incidenza che le successive somme

$$1^3+2^3,\ 1^3+2^3+3^3,\ 1^3+2^3+3^3+4^3,\ \text{ec.}$$

formano tutte un quadrato.

§. 118. Qualsivoglia progressione geometrica

$$a:ar:ar^2:ar^3\ldots.\ ar^{n-2}:ar^{n-1}\ (=t)$$

ha tre proprietà caratteristiche la cui respettiva espressione è

I $a \pm ar : ar \pm ar^2 : ar^2 \pm ar^3 \ldots : ar^{n-2} \pm ar^{n-1}$

II
$a : ar^2 :: a^2 : (ar)^2$ cioè il 1.° al 3.° come $(1.°)^2 : (2°)^2$;

$a : ar^3 :: a^3 : (ar)^3$ cioè il 1.° al 4.° come $(1°)^3 : (2.°)^3$

$a : ar^4 :: a^4 : (ar)^4$ cioè il 1.° al 5.° come $(1.°)^4 : (2.°)^4$

. . . .

$a : ar^{n-1} :: a^{n-1} : (ar)^{n-1}$, 1.° all'n.^{esimo} come $(1.°)^{n-1} : (2.°)^{n-1}$

III $\{ar + ar^2 \ldots + ar^{n-1}\} (= s - a) : \{a + ar + ar^2 \ldots + ar^{n-2}\} (= s - t) :: ar : a :: r : 1$.

Infatti i termini componenti la serie I presentano la ragione costante r.

Le proporzioni poste sotto i n.[i] II, III, si verificano confrontando il prodotto de' medj con quello degli estremi.

Dalla 3.[a] $s - a = r(s - t)$ e però $s = \frac{rt - a}{r - 1}$ (*)

Dati tre degli elementi a, r, n, t, s può eliminarsi uno degli elementi ignoti fra l'eq.[i]

$$\left\{ t = ar^{n-1},\ s = \frac{rt - a}{r - 1} \right\} \ldots (17)$$

per dedurre l'altro dall' eq. finale. Così risolvonsi 20 probl. analoghi a quelli del §. 114.

(*) Se $r = 1$ è $t = a$ ed $s = \frac{0}{0}$ (40) In tal caso si ha d'altronde $s = na$.

Elem. dati.	Incogn.	
n, t, s	a	$a(s-a)^{n-1}=t(s-t)^{n-1}$
n, r, s		$a=s\frac{r-1}{r^n-1}$
r, t, s		$a=rt+s(r-1)$
r, n, t		$a=t:r^{n-1}$.
a, r, n	t	$t=ar^{n-1}$
a, n, s		$a(s-a)^{n-1}=t(s-t)^{n-1}$
a, r, s		$t=s-(s-a):r$
r, n, s		$t=sr^{n-1}\frac{r-1}{r^n-1}$
a, n, t	r	$r=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
a, n, s		$r^n-\frac{s}{a}r+\frac{s}{a}-1=0$
a, t, s		$r=(s-a):(s-t)$
n, t, s		$r^n-\frac{s}{s-t}r^{n-1}+\frac{t}{s-t}=0$
a, r, t	n	$r^{n-1}=\frac{t}{a}$
a, t, s		$t(s-t)^{n-1}=a(s-a)^{n-1}$
a, r, s		$ar^n=(r-1)s+a$
r, t, s		$[rt-(r-1)s]r^{n-1}=t$
a, n, t	s	$s=\left(t^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}\right):\left(t^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}\right)$
a, r, n		$s=a\frac{r^n-1}{r-1}$
a, r, t		$s=(rt-a):(r-1)$
r, n, t		$s=\frac{t}{r-1}\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$

* §. 119. Le formole identiche 1.ª e 6.ª come pure la formola 12.ª sono in pratica quasi generalmente inopportune, perchè fanno dipendere la soluzione del probl. da un'eq. del grado n, che quasi sempre è un n.º non picciolo, e da un'eq. i cui coefficienti sono in conseguenza molto grandi. Si ha un semplicissimo es.º di questa verità facendo $n=4$, $t=16$, $s=30$ poichè l'eq. del probl. comparisce sotto la forma

$$a^4-90a^3+2700a^2-27000a+43904=0 \quad .$$

e non senza un laboriosissimo calcolo somministra $a=2$.

Per ovviare all'inconveniente di cui si tratta noi proponiamo il seg. metodo.

Siccome la formola 1.ª equivale ad

$$s-a:s-t::\sqrt[n-1]{t}:\sqrt[n-1]{a}$$

dove n, t, s sono n.ⁱ cogniti, il rapporto $\sqrt[n-1]{t}:\sqrt[n-1]{a}$ è razionale, e riducendo ambedue i termini alla più semplice espressione dee prendere la forma $p\sqrt[n-1]{k}$, $q\sqrt[n-1]{k}$. Dunque

$$a=q^{n-1}k \text{ ed } s-q^{n-1}k:s-t::p:q \quad .$$

Facciasi successivamente $q=1, 2, 3$ ec. e quell'ipot. che dà

$$(s-t)\frac{p}{q}=s-q^{n-1}k\ldots(1)$$

soddisfa al probl. Il n.º de'tentativi è ristrettissimo 1.º quando n è di una sufficiente grandezza : 2.º quando a non è molto grande, e

queste due ipot. abbracciano la massima parte de' casi possibili.

Sia $t=64$, $n=6$, $s=126$. Siccome

$s-t=62$, $\sqrt[n-1]{t}=\sqrt[5]{64}=2\sqrt[5]{2}$, si ha

$k=2$, $p=2$, $a=2q^5$ e l'eq. (1) si riduce a

$$\frac{62\times 2}{q}=126-2q^5$$

e si verifica facendo $q=1$. Dunque $a=2$.

Gli elementi dati essendo $t=384$, $n=8$, $s=765$ risulta

$s-t=381$, $\sqrt[n-1]{t}=\sqrt[7]{384}=2\sqrt[7]{3}$, $k=3$, $p=2$, $a=3q^7$;

l'ipotesi $q=1$ rende identica l'eq. (1), e però il 1.° termine è $a=3$.

L'unica ipot. meno vantaggiosa è che a sia molto grande ed n, k assai piccoli. Anche in questa però l'eq. (1) siccome della forma semplice $q^n-Aq=B$, e necessariamente affetta da una risolvente razionale, giacchè dev'esservi un razionale valore di q che la verifichi, si tratta, come vedremo, con molto minore difficoltà.

Quando sono dati a, n, s e vuolsi r, giova nella massima parte de' casi ricavare t dalla 6.ª col metodo prec. indi r dalla 9.ª

Se gli elementi per cui deesi determinare r sieno n, t, s, traggasi a dalla formola 1.ª (*met. cit.*) indi r dalla 9.ª

Le formole spettanti ad n sono della forma $A^n=B$ ed esigono il sussidio di una speciale teoria di cui quanto prima.

§. 120. Per inserire m medj geometrici fra α, β, pongasi α per a, β per t, $m+2$ per n in $t=ar^{n-1}$, e siccome risulta $\beta=\alpha r^{m+1}$ si ha subito $r=\sqrt[m+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Così ottiensi

$$\alpha,\ \alpha\sqrt[m+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\ \alpha\left(\sqrt[m+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2 \ldots\ldots \alpha\left(\sqrt[m+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^m;\ \beta.$$

* §. 121. Teor. Se fra due n.^{i} α, β, s'inseriscono m medj aritmetici, indi altrettanti geometrici, ciascuno de' primi supera il corrispondente fra i secondi. Dim.^{ne} Sia λ un intiero positivo $<m+1$. Il λ.^{esimo} medio aritmetico fra α, β essendo $\alpha+\frac{(\beta-\alpha)\lambda}{m+1}$ (115), ed il λ.^{esimo} medio geometrico fra α, β essendo $\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda}{m+1}}$, si tratta di provare che sia generalmente

$$\alpha+\frac{(\beta-\alpha)\lambda}{m+1}>\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda}{m+1}}.$$

Pongasi $\lambda=m$, $\beta=\alpha(1+\delta)$, dove $\delta>0$.

Il rapporto superiore, dividendo tutto per α si cangia in

$$1+\frac{m}{m+1}\delta>(1+\delta)^{\frac{m}{m+1}}$$

ossia in $\qquad\left(1+\frac{m}{m+1}\delta\right)^{m+1}>(1+\delta)^{m}.$

Effettuato lo sviluppamento e soppressi da ambe le parti i primi due termini, risulta

$$\frac{(m+1)m}{2}\cdot\frac{m^2\delta^2}{(m+1)^2}+\frac{(m+1)m(m-1)}{2.3}\cdot\frac{m^3\delta^3}{(m+1)^3}\ \ldots\ldots+$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-h)}{2.3\ldots\ldots(h+2)}\cdot\frac{m^{h+2}\delta^{h+2}}{(m+1)^{h+2}}\ldots\ldots+\delta^{m+1}$$

$$>\frac{m(m-1)}{2}\delta^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\delta^3\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(h+1)]}{2\,.\,3\,\ldots\ldots(h+2)}\delta^{h+2}\ldots+\delta^m$$

Il 1.° termine del 1.° membro supera il 1.° del 2.° perchè

$$\frac{m^2}{m+1}>m-1 \text{ ossia } m^2>m^2-1 :$$

Il 2.° termine del 1.° membro supera il corrispondente del 2.° perchè

$$\frac{m^3}{(m+1)^2}>m-2 \text{ cioè } m^3>m^3-3m-2 .$$

Resta da provarsi che sia

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-h)}{2\,.\,3\,\ldots\ldots(h+2)}\cdot\frac{m^{h+2}}{(m+1)^{h+2}}>\frac{m(m-1)\ldots[m-(h+1)]}{2\,.\,3\,\ldots\ldots(h+2)}$$

vale a dire $\qquad \dfrac{m^{h+2}}{(m+1)^{h+1}}>m-(h+1)$.

Fatta la moltiplicazione per $(m+1)^{h+1}$ ed effettuato lo sviluppamento di questa potenza, il 2.° membro si trasforma in

$$\Big\{m^{h+1}+(h+1)m^h+\frac{(h+1)h}{2}m^{h-1}\ldots+\frac{(h+1)h\ldots(h-i)}{2.3\ldots(i+2)}m^{h-(i+1)}+$$

$$\frac{(h+1)h\ldots(h-i)(h-(i+1))}{2.3\ldots(i+2)(i+3)}m^{h-(i+2)}\ldots+1\Big\}[m-(h+1)] .$$

Soppresso il termine m^{h+2} che si trova in ambedue i membri del rapporto, e trascurati i termini affetti da m^{h+1} che si elidono, si dee provare che si ha $o >$ della somma di tutti gli altri termini. Or questo si verifica se

$$\frac{(h+1)h\ldots(h-i)m^{h-(i+1)}}{2.3\ldots.(i+2)}(h+1) > \frac{(h+1)h\ldots(h-i)(h-(i+1))m^{h-(i+1)}}{2.3\ldots(i+2)(i+3)}$$

e questo rapporto si riduce ad $h+1 > \frac{h-(i+1)}{i+3}$. Dunque ec.

Avendo provato che l'm.esimo medio aritmetico fra α, β, supera l'm.esimo geometrico fra α, β, si osservi che torna allo stesso inserire m medj, ovvero determinare il medio m.esimo ed inserire poi $m-1$ medj fra α ed il medio m.esimo, che indichiamo per $M_{(m)}$ se sia aritmetico, per $\mu_{(m)}$ se geometrico, e siccome la dimostrazione addotta dà per una più forte ragione l'ultimo ossia l'$(m-1)^{esimo}$ medio aritmetico fra α ed $M_{(m)}$ maggiore dell' $(m-1)^{esimo}$ medio geometrico fra α e $\mu_{(m)}$, e così in seg. si concluderà ec.

Il rapporto $\alpha + \frac{(\beta-\alpha)\lambda}{m+1} > \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\lambda}{m+1}}$

che abbiamo dimostrato vero nell'ipot. di $\lambda < m+1$, si riduce mediante la sostituzione di $\alpha(1+\delta)$ per β, e la divisione per α, ad

$1 + \frac{\lambda}{m+1}\delta > (1+\delta)^{\frac{\lambda}{m+1}}$, ed è della forma $1+nx > (1+x)^n$, dove $n<1$: si hanno pertanto rapporti osservabili:

$$1+nx<(1+x)^n \text{ se } n>1$$
$$1+nx=(1+x)^n \text{ se } n=1$$
$$1+nx>(1+x)^n \text{ se } n<1$$
$$1+nx=(1+x)^n \text{ se } n=0$$

§. 122. Per rapporto alle progressioni geometriche convergenti infinite per es.° 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ ec, dove $r=\frac{1}{2}$; si ha $n=\infty$ e $t=o$, perchè se t sia piccolissimo ma finito, la progressione può tuttavia protrarsi, e ciò contraddice all' ipot. di $n=\infty$. Gli elementi che possono cercarsi sono dunque a, r, s, e nella terna degli elementi dati non debbono trovarsi n e t che dipendono l' uno dall'altro, e non costituiscono due elementi distinti e caratteristici. Sono per es.° infinite le progressioni decrescenti che possono avere per 1.° termine uno stesso n.° a. Quindi avviene che le formole 1.ª, 4.ª, 9.ª, 12.ª, 17.ª e 20.ª non determinano a, r, s.

Il prospetto relativo alle progressioni decrescenti infinite comprende 6 sole formole riducibili a tre:

Elem. Dati

$$\left.\begin{matrix} n, r, s \\ \\ r, t, s \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} a=\dfrac{s(r-1)}{r^n-1}=s(1-r) \text{ perchè } r<1 \text{ dà} \\ r^n\ (=r^{\infty})=0\ (*) \\ a=rt-s(r-1)=s(1-r). \end{matrix}\right.$$

(*) Il prodotto di due frazioni è minore di ciascun fattore del medesimo. Sieno A, B le frazioni: se fosse $AB=A$ sarebbe $B=1$ contro l' ipot. Se $AB>A$ sarebbe $\frac{AB}{A}>\frac{A}{A}$ ossia $B>1$. Dunque ec. Così $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, ec.

$$\left.\begin{array}{l} a,n,s \\ a,t,s \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} r^n - \frac{s}{a} r + \frac{s}{a} - 1 = 0 \text{ ossia } r = 1 - \frac{a}{s} \\ r = \frac{s-a}{s-t} = 1 - \frac{a}{s} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} a,r,n \\ a,r,t \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} s = a\frac{r^n - 1}{r-1} = \frac{a}{1-r}, \\ s = \frac{rt-a}{r-1} = \frac{a}{1-r} \end{array}\right.$$

Sia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ dove $a=1$, $r=\frac{1}{2}$. Cercando s si trova $s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Avendosi r ed s si troverebbe

$$a=s(1-\tfrac{1}{2})=2\times\tfrac{1}{2}=1\ .$$

Conoscendo a ed s si ottiene

$$r=1-\frac{a}{s}=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\ .$$

Posto $a=1, r=\frac{1}{3}$, $r=\frac{1}{4}$, $r=\frac{1}{5}$, ec. nella formola $a+ar+ar^2$ ec. risulta

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=s.$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$$

ec. ec.

$$1+\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^3}\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{h}}=\frac{h}{h-1}$$

Il valore $\frac{a}{1-r}$ di s è propriamente il *limite* a cui la somma indefinitimente si accosta a misura che la progressione s'innoltra.

Siccome la voce *limite* ha un significato troppo ampio e generico, noi distinguiamo la somma sopra indicata, chiamandola *somma limite.*

La formola $s = \frac{a}{1-r}$ insegna che se abbiansi due n.[i] a, ar, dove $r<1$, la 3.[a] proporzionale ad $a-ar$ ed a è $=a+ar+ar^2$ ec. teor. meno facilmente dimostrato da *Cavalieri*, *Torricelli*, *Grandi* ec.

§. 123. Le progressioni divergenti, tanto aritmetiche quanto geometriche, qualora si concepiscano prolungate all' infinito, danno $t=\infty$, tal essendo il valore di

$$a+(n-1)d=a+(\infty-1)d\text{; e di } ar^{n-1}=ar^{\infty-1}$$
dove r è >1.

Tal è pure all' infinito la somma s delle progressioni parallele espresse per $a+a$ ec.; progressioni che possono riguardarsi come intermedie fra le aritmetiche e le geometriche, e per cui si ha $s=an=a\infty$.

Per rapporto all' ∞ rigorosamente si verifica:

1.° Che $\infty \pm a=\infty$, perchè se ∞ potesse accrescersi o diminuirsi di una quantità finita a egli non sarebbe infinito, contro l' ipot.

2.° Che ammessa l'idea di una quantità $=\infty$ necessariamente ne deriva l'infinito di 2.° ordine ∞^2, infinitamente $>\infty$; indi l' infinito di 3.° ordine ∞^3, infinitamente $>\infty^2$, ec.

Infatti la somma di una progressione aritmetica divergente infinita è $s\left[=(a+t)\frac{n}{2}\right]=\frac{\infty^2}{2}$; il 3.° proporzionale geometrico alle quantità 1, ∞ è $=\infty^2$, e contiene ∞ quante volte questi contiene l' unità. Così il 3.° proporzionale ad ∞, ∞^2 è $=\infty^3$, ec.

3.° Che esiste un indefinito n.° di quantità infinite intermedie ai termini della progressione, a, ∞, ∞^2, ∞^3. ec. Tali sono infatti $\frac{1}{2}\infty$, $\frac{1}{3}\infty$ ec. $\frac{m}{m+n}\infty$ per rapporto ad a, ∞; e lo stesso dicasi relativamente ad ∞, ∞^2; ec.

4.° Che $\frac{\infty^m}{n} > a\,\infty^{m-1}$. La ragione si è che questo rapporto equivale ad $\frac{\infty}{n} > a$ ossia $\infty > an$, dove ciascuno de' n.i a, n si suppone finito.

5.° Che a^∞, se $a>1$, è infinito di un ordine superiore.

Ciò si dimostra dividendo a in due parti 1, β e sviluppando $(1+\beta)^\infty = 1 + \infty\beta + \frac{\infty^2}{2}\beta^2 + \frac{\infty^3}{2.3}\beta^3 \ldots$

La proporzione $\infty : a :: a : \frac{a^2}{\infty}$ dimostra, che il rapporto di una quantità finita ad un' infinitesimo equivale a quello dell' infinito al finito. Per conseguenza $a \pm \frac{b}{\infty} = a$.

Dalle proporzioni

$$a : \frac{1}{\infty} :: \frac{1}{\infty} : \frac{1}{a\infty^2}\,;\ \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} :: \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3}\text{; ec.}$$

apparisce che fra gl' infinitesimi evvi la stessa correlazione di ordini progressivi, esistente fra gl' infiniti. Dunque

$$\frac{1}{\infty^m} + \frac{1}{\infty^{m+1}} = \frac{1}{\infty^m}.$$

Infatti, moltiplicando per ∞^m risulta

$$1 + \frac{1}{\infty} = 1\text{, eq. vera;}$$

§. 124. Probl. 1.° Essendo h un n.° intiero positivo si dimanda se

$$h^n-(h+h^2+h^3\ldots.+h^{n-1})(=\Delta) \text{ sia } >\text{ò}<0,$$

Soluz. Facendo $h+h^2\ldots+h^{n-1}=s$ si ha

$$s\ (=\frac{rt-a}{r-1})=\frac{h^n-h}{h-1}:$$

quindi $$\Delta\ (=h^n-\frac{h^n-h}{h-1})=\frac{h^{n+1}-2h^n+h}{h-1}.$$

Affinchè il numeratore sia <0 dev'essere $h^{n+1}<2h^n$ cioè $h<2$: ma quando $h=1$ esso è $=0$, ed in forza delle condizioni niun valore <1 può darsi ad h, Dunque $\Delta>0$.

§. 125. Probl. 2.° Si trae per n volte un fiasco di rum da un caratello che ne contiene un n.° m, ed ogni volta si sostituisce un'egual misura di acqua. Si dimanda una formola esprimente la quantità residuale del rum.

Soluz. Siccome la quantità del rum che si trae ciascuna volta è proporzionale a quella che trovasi nel volume di m fiaschi di liquido contenuto nel caratello, si ha

$m:m-1::1:x=\frac{m-1}{m}$ (= alla quantità del rum tratto la 2.ª volta.)

Si ha pure $m:m-1-\frac{m-1}{m}::1:x_{,}=(\frac{m-1}{m})^2$ quantità tratta la 3.ª volta:

Così $m:m-1-\frac{m-1}{m}-(\frac{m-1}{m})^2::1:x_{,,}=(\frac{m-1}{m})$ quantità tratta la 4.ª volta.

In generale è $x_{(n-2)} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$ la quantità del rum chesi trae la volta n.[esima](*)

Il rum residuale è dunque

$$m-1-\frac{m-1}{m}=\frac{(m-1)^2}{m} \text{ dopó il 2.° fiasco:}$$

$$\frac{(m-1)^2}{m}-\left(\frac{m-1}{m}\right)^2=\frac{(m-1)^3}{m^2} \text{ dopo il 3.° ec.}$$

$$\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} \text{ dopo l' n.}^{\text{esimo}}$$

Se per es.° $m=10$ ed $n=10$ si trova che il rum residuale è

$$\frac{9^{10}}{10^9}=\frac{3486784401}{1\ 000\ 000\ 000}=3,4867844\ldots$$

Posto $m-1=p$ il residuo $\frac{p^n}{(p+1)^n}$ svanisce nella sola ipot. di $n=\infty$, nella quale $(p+1)^\infty$ supera infinitamente il numeratore.

È questa una ragione analitica per cui si dimostra la infinita divisibilità della materia.

§. 126. Probl. 3.° *Sessa* figlio dell'Indiano *Daher* avendo inventato il gioco degli scacchi, e fattone un presente al suo Re, fu invitato dal medesimo a chiedere un premio qual più gli piacesse. Incoraggito *Sessa* dall'esibizione sovrana, chiese un grano di frumento per la 1.ª casella della scacchiera, due per la 2.ª, quattro per la 3.ª, ec. sino alla 64.[esima] Si cerca la quantità del frumento corrispondente all'inchiesta. *Soluz.* La somma di tutti i grani è

(*) Vegga la 3.ª giunta dopo l'indice.

$s\left(=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right)=2^{64}-1=$(§.72)18.446.744.083.709.551.615.,
somma, che valutando 450 grani per ogni pollice cubico Parigino, e però

$450\times\overline{12}^3=450\times1728=777600$ grani per ogni piede cubico, empirebbe 4041 granaj alti 20 piedi e di una base quadrata la cui circonferenza sia di quattro leghe, e però di una superficie $=293.471.161$ piedi quadr. (1) Avanza una porzione di granajo capace di formare la fortuna di 1000 famiglie.

* §. 127. Se invece di moltiplicare successivamente un n.° a per uno stesso n.° r, il che produce una progressione geometrica, si fa la moltiplicazione successiva per $a\pm h$, $a\pm 2h$, ec. si ottengono i risultamenti

$$a,\ a(a\pm h),\ a(a\pm h)(a\pm 2h),\ \text{ec.}$$

che il Prof.r *Kramp* chiama *facoltà numeriche*.

Nell'ipot. che si abbia il segno inferiore e che il n.° de' fattori sia $=n$, noi per togliere l'equivoco che le sgraffe potrebbero cagionare, adottiamo il simbolo $[a]^{\frac{n}{h}}$, e se $h=1$

$$a(a-1)(a-2)\ldots(a-\overline{n-1})=[a]^n \quad\ldots(18)$$

Quindi $a(a-1)(a-2)\ldots(a-\overline{m-1})=[a]^m$

$$(a-m)(a-m-1)\ldots(a-m-\overline{n-m-1})=[a-m]^{n-m}$$

ed $\quad [a]^n=[a]^m[a-m]^{n-m}$.

(1) La grande lega di Francia è di piedi 17131.

Il prec. risultamento, facendo prima $m=0$ poi $n=0$ si cangia respettivamente in

$$[a]^0=\frac{[a]^n}{[a]^n}=1\,;\,[a-m]^{-m}\left(=\frac{[a]^0}{[a]^m}\right)=\frac{1}{[a]^m},$$

eq.^{i}, l'ultima delle quali, sostituendo $a+m$ per a diviene

$$[a]^{-m}=\frac{1}{[a+m]^m}=\frac{1}{(a+m)(a+m-1)\ldots(a+m-m-1)}.$$

Dunque, rovesciando l'ordine de' termini e scrivendo n per m,

$$[a]^{-n}=\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)};$$

e però $a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)=\frac{1}{[a-1]^{-n}}\ldots(19)$

La più importante e la più estesa fra tutte le possibili applicazioni delle progressioni aritmetiche e geometriche essendo la dottrina de' logaritmi noi passiamo ad esporla.

CAPITOLO VIII.

De' Logaritmi.

La facilité des calculs rend les logarithmes un des instrumens plus puissans de l'esprit humain.
(*La Place* Journ. de l'école polyth. T. 8, p. 262.).

§. 128. Se nell' eq. $a^x=y$, dove a è un n.° dato, si assegna un certo valore x, ad x, ne

proviene un determinato valore $y_{,}$ d'y e viceversa. Si ha un es.° della proposizione reciproca nell'eq. $2^{x_{,}}=16$, che resta unicamente soddisfatta da $x_{,}=4$.

Il valore $x_{,}$ d'x, che sostituito in a^{x} produce un n.° $y_{,}$ dicesi *logaritmo* d'$y_{,}$: dunque *il logaritmo di un* n.° $y_{,}$ *è l'esponente della potenza a cui bisogna innalzare un dato* n.° *a per produrre il* n.° $y_{,}$. Il n.° a è la *base* del sistema logaritmico. Diremo sistema (a) per indicare quello la cui base è$=a$.

Essendo per es.° $a=2$ l'eq. $2^{x}=y$ genera il sistema

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots\ x \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\ \ldots\ldots\ 2^{x}\ (=y) \end{array}$$

dove i n.[i] della linea superiore sono i logaritmi di quelli che respettivamente loro corrispondono nella linea inferiore.

Variando a varia y ($=a^{x}$) e con esso il sistema. Fra gl'infiniti sistemi si distingue per la sua semplicità quello la cui base è$=10$, perchè $(10)^{n}$ si forma scrivendo n zeri alla destra dell'unità. È questi il sistema del celebre *Enrico Briggs*, che il primo con indicibile travaglio calcolò le tavole logaritmiche, corredate di 14 decimali, da 1 a 20000 e da 90000 a 100000 (*) I logaritmi di *Briggs* diconsi anche logar. *ordinari* e *tabulari*.

Quando $x=0$ è $a^{x}=1$, e però *in ogni sistema si ha log.*$1=0$.

(*) Quest' Opera fu stampata in Londra il 1624 col titolo di ARITMETICA LOGARITMICA. *Adriano Wlacq* supplì al vuoto lasciato da *Briggs*, e le sue tavole, calcolate con 10 decimali, portano il titolo di: *Trigon.*[a] *Artificialis ec. Goudæ* 1633.

Siccome ad $x=1$ corrisponde $y=a$, *il logaritmo della base, qualunque ella sia, è* $=1$.

Se x diventa $=1+h$ cresce y rapidamente, e viceversa se x cangiasi in $1-h$. In questo caso peraltro non mai risulta $y=0$ perchè dovrebb' essere $x=-\infty$.

§. 129. Moltiplicando per ordine l'eq.[i]

$a^{x_{,}}=y_{,}$, $a^{x_{,,}}=y_{,,}$, $a^{x_{,,,}}=y_{,,,}$, ec. si ottiene
$a^{x_{,}+x_{,,}+x_{,,,}ec.}=y_{,}y_{,,}y_{,,,}$ ec.

Sia $x_{,}+x_{,,}+x_{,,,}$ ec. $=t$, $y_{,}y_{,,}y_{,,,}$ ec. $=u$ e siccome nell' eq. $a^{t}=u$ è $t=\log. u$ si avrà
$x_{,}+x_{,,}+x_{,,,}$ ec. $=\log.(y_{,}y_{,,}y_{,,,}$ ec. ec. $)$.
Ma $x_{,}=\log. y_{,}$, $x_{,,}=\log. y_{,,}$, $x_{,,,}=\log. y_{,,,}$, ec.
Dunque
$\log.(y_{,}y_{,,}y_{,,,}\text{ec.})=\log. y_{,}+\log. y_{,,}+\log. y_{,,,}\text{ec.} \ldots (A)$

Così $\frac{a^{x_{,}}}{a^{x_{,,}}}$ ossia $a^{x_{,}-x_{,,}}=\frac{y_{,}}{y_{,,}}$ e però $x_{,}-x_{,,}=\log.\frac{y_{,}}{y_{,,}}$, cioè

$$\log. \frac{y_{,}}{y_{,,}}=\log. y_{,}-\text{lo.}\, y_{,,} \quad \ldots \ldots \quad (B).$$

Facendo $y_{,,}=y_{,,,}$ ec. $=y_{,}$ e supponendo $=m$ il n.° de' fattori $y_{,}$, $y_{,,}$ ec. l' eq. (A) si cangia in

$$\log. y_{,}^{m}=m\log. y_{,} \quad \ldots \ldots \quad (C)$$

L' eq. $a^{\frac{p}{q}}=y$, dove p,q sono n.[i] intieri primi fra loro, dà $a^{p}=y^{q}$: quindi $p\log. a=q\log. y$ e

$$\frac{p}{q}\log. a\ (=\log. y)=\log. a^{\frac{p}{q}} \quad , \ldots \quad (D)$$

Dunque il *log. di un* n.° *della forma* $a^{\frac{p}{q}}$ *si prende come quello di una potenza intiera positiva* a^{m}.

Se a è la base risulta $\frac{p}{q}$=log. y : ma $y(=a^{\frac{p}{q}})$ rappresenta qualunque decimale indefinito: dunque il *log. di un* n.° *decimale indefinito, non periodico* (*) *è un* n.° *finito*, non viceversa.

§. 130. Le formole (A), (B) cangiano respettivamente la moltiplicazione in somma, la divisione in sottrazione: la formola (C) riduce la formazione delle potenze ad una sola moltiplicazione, mentre l'estrazione delle radici, fatto $p=1$, viene dalla formola (D) ridotta ad una semplice divisione:

Per es.° log. 59=1,7708520
log. 157=2,1958997
somma 3,9667517

ed il n.° corrispondente alla somma è
9263=59×157.

Così log.2^9=9 log.2=9×0,3010300=2,7092700.
Il n.° corrispondente è 512=2^9.
Si ha pure
log. $256^{1/4}$=$1/4$ log. 256=$1/4$×2,4082400=0,602060
log. il cui n.° è $4=\sqrt[4]{256}$.

Giova quì osservare che la 1.ª riduzione riesce inetta se i fattori sono piccoli, inopportuna se sono grandi. Nel 1.° caso il prodotto si ottiene più presto con la moltiplicazione; nel 2.° è necessario, come ben tosto vedremo, un calcolo assai laborioso per determinare il n.° che corrisponde al log. finale; n.° di cui

(*) Non periodico perchè questi equivale ad una frazione finita, ed una tal frazione non rappresenta (99) il n.° irrazionale $a^{\frac{p}{q}}$

neppur si ottiene esattamente la cifra delle unità.

La logaritmica formazione delle potenze soggiace a difficoltà non dissimili e ne daremo fra poco un es.° relativo alla potenza 2^{64}, in altra guisa facilmente ottenuta (72).

Malgrado le addotte eccezioni la dottrina de' logaritmi è di sommo pregio. 1.° Essa dà speditamente il prossimo valore delle radici numeriche: 2° Fornisce i mezzi onde appurare con prontezza qualunque formola complicata, come per es.°

$$\frac{a^3\,b\sqrt{c}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{c^3}\,.\,d\,.\sqrt{e}}}$$

il cui valore coincide col n.° corrispondente alla somma

$$\tfrac{8}{3}\log.\,a+\log.\,b-\tfrac{1}{4}\log.\,c-\log.\,d-\tfrac{1}{6}\log.\,e.$$

3.° Serve ad innalzare un n.° composto d'intieri e di decimali ad una potenza, il cui esponente sia parimente composto d'intieri e di decimali: per es.° $(2{,}718)^{6{,}243}$.

4.° Risolve ogni eq. della forma $A^x=B$.

Applicando i log. alle 4 eq.^{i} destinate a determinare il n.° n de' termini di una progressione geometrica (118) si ritrae

$$n=\frac{\log.t-\log.a}{\log.r}+1,\quad n=\frac{\log.t-\log.a}{\log.(s-a)-\log.(s-t)}+1,$$

$$n=\{\log.[a+(r-1)s]-\log.a\}:\log.r,$$

$$n=\{\log.t-\log.[r(t-s)+s]\}:\log.r.$$

Se la soluzione di un probl. dipende dalla determinazione d'x nell' eq. $a^x = b^{px+q} : c^{rx+s}$ si deduce sulle prime

$$x \log. a = (px+q) \log. b - (rx+s) \log. c :$$

quindi

$$(\log. a - p \log. b + r \log. c)\, x = q \log. b - s \log. c$$

e però

$$x = \frac{q \log. b - s \log. c}{\log. a - p \log. b + r \log. c} = \frac{\log. \frac{b^q}{c^s}}{\log. \frac{ac^r}{b^p}}$$

Se fosse $a^{b^x} = c$ si farebbe $b^x = y$, si dedurrebbe $y \log. a = \log. c$ e prendendo di nuovo i logaritmi si avrebbe

$$x \log. b + \log. \log. a = \log. \log. c$$

cioè

$$x = \frac{\log. \log. c - \log. \log. a}{\log. b} = \frac{\log. \frac{\log. c}{\log. a}}{\log. b}$$

§. 131. Il log. di un n.° definito y, che non sia una potenza intiera e positiva della base, è necessariamente composto di due parti, una delle quali è $=$ o ovvero $=$ ad un determinato n.° intiero, e dicesi *caratteristica*: l' altra è un n.° decimale indefinito e non periodico cui si dà il nome di *mantissa*, vocabolo latino dell' età media, (*medii ævi*) che significa

giunta (*). Infatti non si può supporre $a^{\frac{m}{n}}=y$, dove m, n sieno n.[i] finiti primi fra loro, perchè ne proviene $a=\sqrt[m]{y^n}$, cioè un n.° razionale = ad un n.° irrazionale. I logaritmi di cui si tratta, non potendosi esprimere nè razionalmente nè irrazionalmente, costituiscono una classe di valori *trascendenti*, calcolabili soltanto per approsimazione.

Nel sistema di *Briggs* il cui tipo è

$$\log. 1=0, \log. 10=1, \log. 100=2, \log. 1000=3, \text{ec.}$$

$$10^0=1,\quad 10^1=10,\quad 10^2=100,\quad 10^3=1000, \text{ec.}$$

la caratteristica contiene tante unità quante sono le cifre meno una del n.° a cui spetta. Per es.° i n.[i] di tre cifre, i cui limiti sono 100 e 1000, hanno 2 per caratteristica: tre i n.[i] di quattro cifre i cui limiti sono 1000 e 10000, e così ec.

Chiamando C la caratteristica, M la mantissa, quando si è ottenuto $\log. A=C, M$ subito si deduce $\log. \frac{A}{10}=C-1, M$; $\log. \frac{A}{100}=C-2, M$; ec. $\log. 10A=C+1, M$; $\log. 100A=C+2, M$; ec. Si ha per es.°

$$\log. 2000=3,301030;\ \log. 200=2,301030,$$
$$\log. 20=1,301030;\ \log. 2=0,301030;$$
$$\log. 0,2=-1+0,301030=-0,698970;\ \text{ec.}$$

(*) *Mantissa obsonium vincit* = è più la giunta che la derrata. *Lucilio apud Festum*.

§. 132. Nel prendere log. $\frac{y_{\prime}}{y_{\prime\prime}}$ (= log. $y_{\prime}$ − log. $y_{\prime\prime}$) sovente succede che il risultamento sia negativo, = − L. Per trovare il n.° corrispondente si può cercare il n.° N che corrisponde a + L., ed $\frac{1}{N}$ (= N_{1}) è il n.° richiesto, ma questo metodo esige l' incomoda divisione di 1 per N. Per evitarla si accresca di n unità la caratteristica di log. $y_{\prime}$, finchè sia log. $y_{\prime}$ − log. $y_{\prime\prime} > 0$, ed il n.° spettante al nuovo logaritmo L_{1}, purchè si avanzi di n passi la virgola verso la sinistra, è = N_{1}.

Trattandosi per es.° di appurare log. $\frac{17 \times 45}{1199}$, si aumenta di 1 la caratteristica di log. 17 e si opera come segue:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2,2304489 \ (=\text{log. } 17+1) \\
 & +1,6532125 \ (=\text{log. } 45) \\
\text{somma} & 3,8836614 \\
 & -3,0788192 \ (=\text{log. } 1199) \\
 & 0,8048422 = L_{1}.
\end{array}
$$

Si cerchi il n.° N_{1} spettante a questo logaritmo; qualora basti una mediocre approssimazione, prendasi nelle tavole N_{1} = 63803. n.° il cui logaritmo è 4,804821 ... e 0,63803 sarà presso a poco il n.° cercato (*).

È invalso l' uso di concepire accresciuta di 10 la caratteristica d' $y_{\prime}$ e di scrivere

(*) Daremo in seg. un metodo per determinare con qualunque grado di approssimazione il n.° di un dato logaritmo.

log. $y_{,}$ + 10 − log. $y_{,,}$ per log $\frac{y_{,}}{y_{,,}}$; 10 − log. $y_{,,}$ è un logaritmo positivo che dicesi *complemento aritmetico*, e si ottiene sottraendo l'ultima cifra d' $y_{,}$ da 10, tutte le altre da 9. Si ha per es.°

Compl. log. 15 = 10 − log. 15 = 10 − 1,17609126

$$=\left\{\begin{array}{r} 9,9999999(10) \\ -1,17609126 \end{array}\right\} = 8,82390874 .$$

Siccome la caratteristica del risultamento prec. dee diminuirsi di 10, ottenuto il n.° corrispondente a 0,8239 ec. si promuove in esso la virgola di due passi verso la sinistra ed il nuovo n.° è quello che si richiede.

Trattandosi per es.° di appurare log. $\frac{17\times45}{1199}$ si cerca nelle tavole log. 1199 = 3,07881918 e si opera come segue:

	1,23044892	(= log. 17)
	1,65321251	(= log. 45)
Somma	2,88366143	
	6,92118082	(= compl. log. 1199)
Somma	9,80484225.	

Siccome la diecina non si può togliere senza ricadere nel risultamento negativo − 0,19515775, bisogna rintracciare il n.° che corrisponde a 0,80484225 e dividerlo per 10. Noi preferiamo di aumentare di un'unità la caratteristica di 17 ovvero di 45, e di sottrarre 3,07881918 da 3,88 ... Così una sottrazione facile quanto la somma sta in vece di due operazioni, la somma e la formazione del complemento.

§. 133. Siccome ogni variazione d'y nell'eq. $a^x=y$ porta seco una corrispondente variazione d'x e viceversa, una delle variabili x,y è funzione dell'altra. L'idea di questa reciproca dipendenza suggerisce il problema: *Data la* x *assegnare una sua funzione equivalente ad* y *e viceversa*; probl. di somma importanza perchè uno almeno de' n.i a, x, y, è ordinariamente frazionario indefinito, e riesce impossibile appurare con una immediata operazione il valore della variabile ignota.

Tali sono per es.º i seg. casi:

$$10^x=12;\ (2,718\ldots)^x=4;\ (2,718\ldots)^{2,3025851\ldots}=y.$$

Il probl. sopra enunciato equivale in sostanza a questi due:

I Dato un logaritmo trovare il n.º corrispondente.

II Dato un n.º determinare il suo logaritmo.

Per procedere alla soluzione del 1.º probl. dicasi $x_{,}$ il logaritmo dato, $y_{,}$ il n.º, e pongasi $y_{,}$ ossia

$$a^{x_{,}}=1+A_1\,x_{,}+A_2\,x_{,}^2+A_3\,x_{,}^3\ldots+A_m\,x_{,}^m\ldots\ldots(1).$$

Si fa il 1.º termine$=1$, perchè nell'ipot., possibile come qualunque altra, che sia $x_{,}=0$ risulta $a^{x_{,}}=a^0=1$; si prescinde da ogni potenza negativa perchè $A_h\,x_{,}^{-h}$ è $=\infty$ (65) quando $x_{,}=0$. Verificheremo *a posteriori* che dall'ipotetico sviluppamento di $a^{x_{,}}$ deesi escludere qualsivoglia potenza fratta d'$x_{,}$.

Siccome l'eq. (1) dee verificarsi qualunque sia il dato valore $x_{,}$ d'x, sostituiscasi un nuovo valore $x_{,,}$ per x onde si abbia

$$a^{x_{,,}} = 1 + A_1 x_{,,} + A_2 x_{,,}^2 + A_3 x_{,,}^3 \ldots + A_m x_{,,}^m \ldots \quad (2).$$

Dividendo per $x_{,} - x_{,,}$ la differenza dell'eq.[i] (1), (2) si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^{x_{,}} - a^{x_{,,}}}{x_{,} - x_{,,}} = A_1 + A_2 (x_{,} + x_{,}) + A_3 (x_{,}^2 + x_{,} x_{,,} + x_{,,}^2) \ldots \\ + A_m (x_{,}^{m-1} + x_{,}^{m-2} x_{,,} + x_{,}^{m-3} x_{,,}^2 \ldots + x_{,} x_{,,}^{m-2} + x_{,,}^{m-1}) \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Ma $a^{x_{,}} - a^{x_{,,}} = a^{x_{,,}} (a^{x_{,} - x_{,,}} - 1)$, e facendo dentro la parentesi $a = 1 + n$ risulta

$$a^{x_{,}} - a^{x_{,,}} = a^{x_{,,}} \left(\frac{x_{,} - x_{,,}}{1} n + \frac{(x_{,} - x_{,,})(x_{,} - x_{,,} - 1)}{1 \cdot 2} n^2 \ldots \right)$$

Dunque l'eq. (3) riducesi ad

$$a^{x_{,,}} \left\{ n + \frac{x_{,} - x_{,,} - 1}{1 \cdot 2} n^2 + \frac{(x_{,} - x_{,,} - 1)(x_{,} - x_{,,} - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 \ldots + \right.$$

$$\left. \frac{(x_{,} - x_{,,} - 1) \ldots [x_{,} - x_{,,} - (m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} n^m \right\} =$$

$$A_1 + A_2 (x_{,} + x_{,,}) + A_3 (x_{,}^2 + x_{,} x_{,,} + x_{,}^2) \ldots +$$

$$A_m (x_{,}^{m-1} + x_{,}^{m-2} x_{,,} \ldots + x_{,,}^{m-1})$$

e dev'essere identica qualunque sia il valore d'$x_{,}$, $x_{,,}$. Pongasi dunque $x_{,,} = x_{,}$ e si avrà identicamente

$$a^{x_{,}} \left\{ n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{4} n^4 \cdots \pm \frac{1}{p} n^p \right\} =$$

$$A_1 + 2A_2\,x_{,} + 3A_3\,x_{,}^2 \ldots + (m+1)A_{m+1}x_{,}^m$$

cioè, posto $n - \frac{1}{2}n^2$ ec. $= k$ ed $1 + A_1 x_{,}$ ec. per $a^{x_{,}}$,

$$\left.\begin{array}{l} k\{1 + A_1 x_{,} + A_2 x_{,}^2 + A_3 x_{,}^3 \ldots + A_m x_{,}^m\} \\ -\{A_1 + 2A_2\,x_{,} + 3A_3 x_{,}^2 + 4A_4 x_{,}^3 \ldots + \overline{m+1}A_{m+1}\,x_{,}^m\} \end{array}\right\} = 0$$

eq. la cui semplice e regolare simmetria ci assicura dover essere inalterabilmente, come nell'eq. (4) del §. 65

$$A_1 = k, A_2 \left(= \tfrac{1}{2} A_1\, k\right) = \tfrac{1}{2} k^2, A_3\left(= \tfrac{1}{3} A_2\, k\right) = \frac{1}{2.3}\, k^3, \ldots$$

$$A_{m+1}\ \left(= \frac{1}{m+1}\, A_m k\right) = \frac{1}{2\,.\,3 \ldots m(m+1)}\ k^{m+1}.\text{Dunque}$$

$$(*)\ a^{x_{,}} = 1 + \frac{x_{,}}{1}k + \frac{x_{,}^2}{1.2}\cdot k^2 + \frac{x_{,}^3}{1\text{-}2.3}.k^3 \ldots + \frac{x_{,}^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}\,k^{m+1} \ldots (E)$$

Quando $x_{,} = 1$ è $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} \ldots + \frac{k^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}$.

Attesa l'indeterminata n anche il n.° k può farsi $= 1$, ed in tal caso, indicando per e il corrispondente valore di a, ottiensi

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\text{ec.} = 2{,}71828\ 18284\ldots$$

Nella stessa ipot. di $k = 1$ l'eq. (E) si cangia in

$$e^{x_{,}} = 1 + \frac{x_{,}}{1} + \frac{x_{,}^2}{1\,.\,2} \ldots + \frac{x_{,}^{m+1}}{1\,.\,2 \ldots (m+1)} \ldots (F)$$

(*) Questo sviluppamento è generale e rigoroso. L'artifizio di sostituire $2x_{,}$ per $x_{,}$ in $1 + A_1 x_{,} + A_2 x_{,}^2$ ec. e di paragonare il risultamento $(= a^{2x_{,}})$ con $(1 + A_1 x_{,} + A_2 x_{,}^2 \text{ ec.})^2$ non dà che una meschina induzione.

Ma facendo in questa $x_{,}=k$ si trova $e^k=a$: dunque $k=\frac{\log. a}{\log. e}$, e supponendo e la base del sistema logaritmico risulta

$$a^{x_{,}}(=y_{,})=1+\frac{x_{,}}{1}\log. a+\frac{x_{,}^2}{1.2}(\log. a)^2 \ldots +\frac{x_{,}^{m+1}}{1.2 \ldots (m+1)}(\log. a)^{m+1} \ldots (G)$$

formola assai convergente se a sia un piccol numero, e che nell' ipot. onde si tratta felicemente risolve il Probl. I. La predetta formola comprende la seg., *non sempre inutile* nell'analisi:

$$a=1+\log. a+\frac{1}{2}(\log. a)^2+\frac{1}{6}(\log. a)^3 \ldots +\frac{1}{2.3 \ldots (m+1)}(\log. a)^{m+1} \ldots (H)$$

Essa prova la verità dell'eq. ipotetica (1), perchè facendo $a=$ ad un picciol n.° , per es.° = 2, la somma di pochi termini riproduce con un'approssimazione straordinaria il n.° a.

Sostituendo $1+n$ per a e l'equivalente di k nell' eq. $k=\frac{\log. a}{\log. e}$ si ottiene

$$\log.(1+n)=\log. e\{n-\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{3}n^3 \ldots \pm \frac{1}{p}n^p\} \ldots (I)$$

espressione completa e rigorosamente dedotta, a cui per risolvere il probl. II., altro non manca che un' opportuna convergenza e la determinazione della base del sistema logaritmico da cui risulti il valore di log. e, *modulo* del sistema.

Supponendo e la base si ha il sistema di *Napier* Barone Scozzese, conosciuto sotto il nome di *Nepero*.

I logaritmi Neperiani diconsi anche *naturali* ed *iperbolici*, atteso uno specioso rapporto ch' essi hanno coll' iperbola conica di cui a suo luogo. Lo sviluppamento di questi logaritmi è compreso nella formola (I) purchè vi si faccia log. $e=1$
Siccome
$\log.(1-n)=-\log. e\,(n+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{4}n^4 \text{ ec.})$

si ha $\log.\frac{1+n}{1-n}=2\log. e\left\{\frac{n}{1}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^5}{5}\text{ ec.}\right\}$.

Pongasi $\frac{1+n}{1-n}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$: quindi si deduca

$n=\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$ e sarà $\log.(\alpha+\beta)=\log.\alpha+$

$2\text{l}.e\left\{\frac{\beta}{2\alpha+\beta}+\tfrac{1}{3}\frac{\beta^3}{(2\alpha+\beta)^3}+\tfrac{1}{5}\frac{\beta^5}{(2\alpha+\beta^5)}\text{ ec.}\right\}\ldots(L)$

serie tanto più rapida quanto più α cresce in paragone di β, e che posto log. $e=1$, $\beta=1$ ed α successivamente $=1$, 2, 3 ec. prontamente somministra il logaritmo naturale di qualsivoglia n.° Si ha per es.°

$\log. 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{3^5}\text{ec.}\right\}=0,69314\ 718$,

$\log.3=\log.2+2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{5^5}\text{ ec.}\right\}=1,09861228$

$\log.5=\log.4+2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}.\frac{1.}{9^3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{9^5}\text{ ec.}\right\}=1,6094379\text{I}$

dove $\log. 4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2 = 1,3862943 6$.
Si ha pure $\log.6 = \log.2 + \log.3 (130) = 1,79175946$

$$\log. 10 = \log. 2 + \log. 5 = 2,30258509$$

Si sono presi nove termini per log. 2, sei per log. 3, quattro per log. 5.

Bastano due termini per avere senza errore

$$\log. 101 = 4,6151210879$$

Un solo termine dà $\log. 1000 = 6,9077543$.
In generale

$$l.(\alpha+1) = \log.\alpha + 2\left\{\frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2\alpha+1)^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2\alpha+1)^5}\text{ec}\right\} \ldots (M)$$

§. 134. Sostituito un qualunque determinato n.° $y_{,}$ per y nell'eq. $a^x = y$, se si fa successivamente $a = a_{,}$, $a = a_{,,}$, evvi un respettivo valore $x_{,}$, $x_{,,}$ d'x che soddisfa all'eq.[i] $a_{,}^{x_{,}} = y_{,}$, $a_{,,}^{x_{,,}} = y_{,}$. Sia $a_{,} = 10$, $a_{,,} = e$: dalla 1.[a] eq. $a_{,}^{x_{,}} = y_{,}$ deducasi $x_{,} = \log.^{(t)} y_{,}$ ($= \log.^{\text{tabul.}} y_{,}$): dalla 2.[a] $a_{,,}^{x_{,,}} = y_{,}$ si derivi $x_{,,} = \log.^{(n)} y_{,}$ ($= \log.^{\text{natur.}} y_{,}$), e prendendo il log. naturale dell'eq. $10^{x_{,}} = e^{x_{,,}}$ si avrà $x_{,} \log.^{(n)} 10 = x_{,,}$

ossia
$$\log.^{(t)} y_{,} = \frac{1}{\log.^{(n)} 10} . \log.^{(n)} y_{,} \ldots (N)$$

Ma $\frac{1}{\log.^{(n)} 10} = \frac{1}{2,3025851\ldots} = 0,4342944\ldots$ Dunque

$$\log.^{(t)} y_{,} = 0,4342944 \log.^{(n)} y_{,} \ldots (N_{,})$$

e vicev. $\log.^{(n)} y_{,} = 2,3025851 \log.^{(t)} y_{,}$.

Fatto $y_{,} = e$ nell'eq. $(N_{,})$ risulta

$\log.^{(t)} e = 0,4342944$, ed è il modulo μ per cui bisogna moltiplicare i logaritmi naturali per convertirli in tabulari.

Pongasi questo valore in (L) e si avrà

$$\log.^{(t)}(\alpha+\beta) = \log.^{(t)}\alpha + 0,868588\left\{\frac{1}{2\alpha+\beta} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2\alpha+\beta)^3}\text{ec.}\right\} \ldots (O)$$

La formola (N) dà

$\log.^{(t)} y_{,} : \log.^{(t)} y_{,,} :: \log.^{(n)} y_{,} : \log.^{(n)} y_{,,}$. Ma i valori di a, cioè i sistemi logaritmici, dipendono dal nostro arbitrio. Dunque i logaritmi di due n.[i] in qualunque sistema $(a_{,})$ stanno come i logaritmi degli stessi n.[i] in un altro sistema $(a_{,,})$

Le formole (M), (N), risolvono il probl. II ne' respettivi sistemi $(a = 2,718\ldots)$, $(a = 10)$; soluzione completa perchè soddisfacente ai sistemi adottati nella Scienza del Calcolo, e perchè sostituendo ad a, qualunque n.° diverso da 10, la serie (M) e la formola (N) somministrano il logaritmo d' ogni dato n.° $y_{,}$ corrispondente alla nuova base.

§. 135. Se il n.° N di cui si desidera il logaritmo tabulare supera il massimo n.° delle tavole, si spartisca N in due parti $\alpha 000\ldots$, β, gli zeri essendo tanti quante le cifre del n.° β, cosicchè il n.° α cada ne' limiti delle tavole, e si avrà dalla serie (L) il logaritmo richiesto. Essendo per es.°

$N = 10785962$ facciasi $\alpha = 10785000$

ed un solo termine della serie citata ci darà
$\log.(10785000 + 962) = 7,0328201 49473 +$

$$0,43429\,44819\,03 \times \frac{1924}{21570962} = 7,032858885.$$

Qualora N sia composto d'intieri e di decimali si sopprime la virgola e poi nel logaritmo del nuovo n.° si diminuisce la caratteristica di tante unità quante erano le decimali. Così da log. 2718 = 3,43424945 si deduce
log. 2,718 = 0,43424945 (*)

Sostituendo nella serie (I) $\frac{1}{n}$ per n si ha

$$\log(1+\frac{1}{n})=\log. e\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}\text{ec.}\right\}$$

Ma $\log(1+\frac{1}{n})=\log(1+n)-\log. n$. Dunque
$\log(1+n)-\log(1+\frac{1}{n})$ ossia

$$\log. n=\log. e\left\{n-n^{-1}-\frac{1}{2}(n^2-n^{-2})+\frac{1}{3}(n^3-n^{-3})\text{ec.}\right\}\ldots(P)$$

I sistemi di *Briggs* e di *Nepero* sono preferibili a tutti gli altri: il 1.° per l'opportunità della base, ed è il principale strumento de' calcoli trigonometrici; il 2.° per la semplicità del modulo, ed è costantemente adottato nel Calcolo Integrale. Le due tavole seg. rendono spedito il passaggio dall'uno all'altro sistema.

Per esse la moltiplicazione si cangia in somma: basta che avvertasi di collocare le cifre de' respettivi prodotti nel rango che lor conviene.
Dall'essere per es.°

$$\frac{4}{\mu}=9,210\ldots \quad \text{deriva} \quad \frac{0,4}{\mu}=0,9210\ldots$$

(*) I due probl. prec. si risolvono con una semplicissima regola pratica, che prendendo la mantissa con 7 decimali dà per lo meno 6 decimali esatte. Sia per es.°
$N = 165281$: pongasi $N = 165200 + 81$; si deduca
log. 1653--log. 1652 = 0,000263 ; 81 × 0,000263 = 0,00021303
e si avrà log. 165281 = log. 1652 + log. 100 + 0,00021303 = 5,218222.
La stessa regola somministra log. 16528,1 ; log. 1652,81 ; ec.

Tav. I.

$\mu = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289$

$2\mu = 0,86858\ 89638\ 06503\ 65530\ 22578$

$3\mu = 1,30288\ 34457\ 09755\ 48295\ 33867$

$4\mu = 1,73717\ 79276\ 13007\ 31060\ 45156$

$5\mu = 2,17147\ 24095\ 16259\ 13825\ 56445$

$6\mu = 2,60576\ 68914\ 19510\ 96590\ 67734$

$7\mu = 3,04006\ 13733\ 22762\ 79355\ 79023$

$8\mu = 3,47435\ 58552\ 26014\ 62120\ 90312$

$9\mu = 3,90865\ 03371\ 29266\ 44886\ 01601$.

Tav. II.

$\frac{1}{\mu} = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$

$\frac{2}{\mu} = 4,60517\ 01859\ 88091\ 36803\ 59828$

$\frac{3}{\mu} = 6,90775\ 52789\ 82137\ 05205\ 39742$

$\frac{4}{\mu} = 9,21034\ 03719\ 76182\ 73607\ 19656$

$\frac{5}{\mu} = 11,51292\ 54649\ 70228\ 42008\ 99570$

$\frac{6}{\mu} = 13,81551\ 05579\ 64274\ 10410\ 79484$

$\frac{7}{\mu} = 16,11809\ 56509\ 58319\ 78812\ 59398$

$\frac{8}{\mu} = 18,42068\ 07439\ 52365\ 47214\ 39312$

$\frac{9}{\mu} = 20,72326\ 58369\ 46411\ 15616\ 19226$.

Per agevolare l'applicazione della formola (L) e dell'analoga

$$\log.(\alpha+1)=\log.\alpha+\log.e\left\{\frac{2}{2\alpha+1}\text{ ec.}\right\}$$

giova limitare secondo il bisogno il n.° delle decimali componenti log. e. Se $\frac{2\beta}{2\alpha+\beta}$ è $=\delta<0{,}0000\,a$, essendo $a<7$, bastano 3 decimali di log. e per averne 7 in log. $(\alpha+\beta)$; ne bastano 4 se $\frac{2\beta}{2\alpha+\beta}=\delta<0{,}000\,a$ ed $a<7$; 5 se nella prec. ipot. è a una cifra >6; ec. ec.

* §. 136. Quando con le serie (O), del §. 134. si vogliono calcolare i logaritmi tabulari con molte decimali, per es.° con 15 o 20, la moltiplicazione per 2 log. e, malgrado il compendio somministrato dalla tavola I. riesce oltre modo fastidiosa, perchè bisogna prendere log. e almeno con 17 o con 22 decimali.

Giova dunque avere una serie indipendente dal modulo, e che almeno per rapporto ai n.i primi maggiori di 1000 presenti una rapidissima convergenza.

Siccome

$$(Q)\ldots\begin{cases}\log.(n+x)=\log.\left\{n\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}=\log.n+\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}-\frac{x^4}{4n^4}\text{ ec.}\\ \log.(n-x)=\log.\left\{n\left(1-\frac{x}{n}\right)\right\}=\log.n-\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}-\frac{x^3}{3n^3}-\frac{x^4}{4n^4}\text{ ec.}\end{cases}$$

introducendo il modulo μ e facendo $x=1$ si ottiene

$$\log.(n+1)+\log.(n-1)=2\log.n-\frac{\mu}{n^2}-\frac{\mu}{2n^4}-\frac{\mu}{3n^6}-\frac{\mu}{4n^8}\text{ec.}$$

e però

$$\log.n=\tfrac{1}{2}\left\{\log.(n+1)+\log.(n-1)+\frac{\mu}{n^2}+\frac{\mu}{2n^4}+\frac{\mu}{3n^6}\text{ec.}\right\}$$

Per giungere ad un risultamento libero dal modulo facciasi log. $(n+1)$ — log. $(n-1)=\delta$: ; suppongasi

$$\frac{\mu}{n^2}+\frac{\mu}{2n^4}+\frac{\mu}{3n^6}+\frac{\mu}{4n^8}\text{etc.}=\delta\left\{\frac{A}{n}+\frac{B}{n^3}+\frac{C}{n^5}+\frac{D}{n^7}\text{ etc.}\right\}$$

e poichè la differenza delle serie (Q), previa la sostituzione di 1 per x

dà $\delta=\frac{2\mu}{n}+\frac{2\mu}{3n^3}+\frac{2\mu}{5n^5}$ etc. , sostituendo questa espressione nell' eq. prec. e sopprimendo μ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\frac{1}{4n^8}\text{ etc.}&=\left\{\frac{2}{n}+\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{5n^5}\text{etc.}\right\}\left\{\frac{A}{n}+\frac{B}{n^3}+\frac{C}{n^5}\text{ etc.}\right\}\\&=\frac{2A}{n^2}+\frac{2A}{3n^4}+\frac{2A}{5n^6}+\frac{2A}{7n^8}\text{ etc.}\\&\qquad+\frac{2B}{n^4}+\frac{2B}{3n^6}+\frac{2B}{5n^8}\text{ etc.}\\&\qquad\qquad+\frac{2C}{n^6}+\frac{2C}{3n^8}\text{ etc.}\\&\qquad\qquad\qquad+\frac{2D}{n^8}\text{ etc.}\end{aligned}$$

Quindi $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}-\frac{A}{3}=\frac{1}{12}$, $C=\frac{1}{6}-\frac{A}{5}-\frac{B}{3}=\frac{7}{180}$,

$D=\frac{1}{8}-\frac{A}{7}-\frac{B}{5}-\frac{C}{3}=\frac{181}{7560}$, $E=\frac{1}{10}-\frac{A}{9}-\frac{B}{7}-\frac{C}{5}-\frac{D}{3}=\frac{1903}{113400}$, ec.

e però

$$(R)\,\mathrm{l}.n = {}^1\!/_2 \left\{ \log.(n+1) + \log.(n-1) + \frac{\delta}{2n}\left(1 + \frac{1}{6n^2} + \frac{7}{90n^4} + \frac{181}{3780n^6}\,\text{ec.}\right)\right.$$

Questa è la serie che si cercava. Essa dà il log. in qualunque sistema, e suppone calcolati con la serie (O) (134) i log. de' soli 169 n.[i] primi compresi fra 1 e 1000. *Keil* la produsse, *Canovai* e *Del Ricco* l' hanno dimostrata. Partendo dal n.° 1001 si hanno 12 decimali esatte con prendere il solo 1.° termine $\frac{\delta}{2n}$; se ne hanno 18 per mezzo de' primi due termini, 20 mediante i primi tre, etc. Siccome n si suppone un n.° primo; $n+1$ ed $n-1$ son n.[i] pari e però decomponibili. Cerchiamo per es.° il logaritmo tabulare di 1001, con 20 decimali esatte.

$$\log.(n+1) = \log.1002 = \log.2 + \log.501 = 3{,}000\;86\;77215\;31226\;91249$$
$$\log.(n-1) = \log.1000 = \qquad = 3,$$
$$\log.(n+1) + \log.(n-1) = \qquad = 6{,}\;00086\;77215\;31226\;91249$$
$$\delta = \log.(n+1) - \log.(n-1) = \qquad = 0{,}00086\;77215\;31226\;91249$$
$$\frac{\delta}{2n} = \frac{0{,}00086\;77215\;31226\;91249}{2002} = 0{,}00000\;04334\;27338\;27518$$
$$\frac{\delta}{12n^3} = \frac{0{,}\;00086\;77215\;31226\;91249}{120\;360\;36012} = 0{,}\;00000\;00000\;00072\;09363$$
$$\frac{7\delta}{180n^5} = \frac{0{,}00607\;40507\;18588\;38743}{18090\;18010\;80090\;0180} = 0{,}00000\;00000\;00000\;00003$$
$$\text{Somma} \qquad 6{,}00086\;81549\;58637\;28133$$

Dunque $\log.\ 1001 = 3,\ 00043\;40774\;79318\;64067$

Per avere il logaritmo di un n.° primo con 7 decimali basta la formola

$$\log. n = \tfrac{1}{2} \left\{ \log.(n+1) + \log.(n-1) + \frac{1}{n^2} \right\}$$

dove $\frac{1}{n^2}$ equivale a $\frac{\delta}{2n}$; e se il n.° sia > 3162 si può sopprimere la frazione $\frac{1}{n^2}$. Vogliasi per es.° il logaritmo tabulare di 3173.

Si ha $\log. 3173 = \tfrac{1}{2} \log. 3174 + \tfrac{1}{2} \log. 3172$.

Ma $3174 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 23$ e $3172 = 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 61$. Dunque

$\log. 3173 = \tfrac{1}{2} (3 \log. 2 + \log. 3 + \log. 13 + 2 \log. 23 + \log. 61)$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{r} 0{,}90308\ 99869 \\ +0{,}47712\ 12547 \\ +1{,}11394\ 33523 \\ +1{,}72345\ 56720 \\ +1{,}78532\ 98350 \end{array} \right.$$

$= \tfrac{1}{2}(7{,}00294\ 01009) = 3{,}50147\ 00504$,

logaritmo di cui sono esatte le prime 7 decimali, purchè per una maggiore approssimazione si scriva 3, 5014701.

Volendo il logaritmo Neperiano di 3173 si trova

$$\log. 3173 = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 2{,}07944\ 15415 \\ 1{,}09861\ 22886 \\ 2{,}56494\ 93574 \\ 6{,}27098\ 84318 \\ 4{,}11087\ 38641 \end{array} \right.$$

$= \tfrac{1}{2}(16{,}12486\ 54834) = 8{,}06243{,}27\underline{417}$

* §. 137. Per compiere la soluz.[ne] del probl. I. (133) a cui parzialmente si soddisfece con la

formola (H) esposta sul fine del §.cit. ci proponiamo il seg.

Probl. Dato un logaritmo Brigsiano L non esistente nelle tavole, trovare il suo corrispondente n.° N. Soluz.ne 1.a Se si conoscesse un n.° n prossimamente $< N$ basterebbe rintracciarne la correzione δn, onde avere $n+\delta n = N$. Cerchiamo n, indi δn.

Presi i logaritmi $L_{,}$, $L_{,,}$ prossimi ad L ($L_{,} < L$; $L_{,,} > L$) se per $N_{,}$, $N_{,,}$ s'indicano i n.i corrispondenti si ha prossimamente

$$(S) \ldots L_{,,} - L_{,} : 1 (= N_{,,} - N_{,}) :: L - L_{,} : \frac{L - L_{,}}{L_{,,} - L_{,}} (= h)$$

e presso a poco $n = N_{,} + h$.

Trovato con la formola (L) del §. 133 il valore di log.(t)n si deduca

$$\log. N - \log. n = \Delta,$$

n.° cognito perchè log. N è il log. dato L. Sostituendo $n + \delta n$ per N l' eq. prec. si cangia in

$$\Delta = \mathrm{l}.\frac{n+\delta n}{n} = \mathrm{l}.(1 + \frac{\delta n}{n}) = (133(I))\ \mu \left\{ \frac{\delta n}{n} - \tfrac{1}{2}\frac{(\delta n)^2}{n^2} + \tfrac{1}{3}\frac{(\delta n)^3}{n^3} \text{ ec.} \right.$$

Quindi $$\frac{\delta n}{n} = \frac{\Delta}{\mu} + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\mu^2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{\Delta^3}{\mu^3}, \ (*)$$

e però $$\delta n = n\left(\frac{\Delta}{\mu} + \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\mu^2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{\Delta^3}{\mu^3} + \text{ec.}\right), \ldots (T)$$

serie, che attesa la picciolezza di Δ, è sempre rapidissima.

Se L oltrepassa i limiti delle tavole si diminuisce la caratteristica; s' egli è Neperiano

(*) Supponendo $\frac{\delta n}{n} = A\frac{\Delta}{\mu} + B(\frac{\Delta}{\mu})^2$ ec. il confronto de' termini simili dà subito $A = 1$, $B = \tfrac{1}{2}$, ec.

e compreso nelle tavole si ha più speditamente il valore di log. n e quello di δn, ma ciò, attesa la ristrettezza delle attuali tavole Neperiane può ben di rado succedere.

Siccome l'inesattezza della proporzione (S) cresce con la picciolezza de' n.i, i cui logaritmi presentano una più sensibile differenza, se la caratteristica di L sia < 3, giova aumentarla per quanto é permesso dalle tavole. Si eccettuano que' logaritmi che hanno qualche zero subito dopo la virgola e la caratteristica $=0$, perchè in questo caso il termine $L-L_{,}$ è $= L-0$ e perciò picciolissimo.

Es.° I.° Sia $L = 0,00006\ 93311\ 37$. Siccome $L_{,} = 0$ ed $L_{,,} = 0,\ 30102\ 99$ si ha $h = 0,0002$, ed $n = N_{,} + h = 1 + 0,0002 = 1,0002$;

Quindi $\log. n = 0,00008\ 68505\ 00$,

$$\Delta = -0,00001\ 75193\ 62; \frac{\Delta}{\mu} = -0,00004\ 03398\ 22;$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^2 = 0,00000\ 00008\ 14; \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^3 = 0,00000\ 00000\ 00$$

$$\delta n = -1,0002 \times 0,00004\ 0339822 = -0,00004\ 03478$$

$$\text{ed } N = \left\{\begin{array}{r} 1,0002 \\ -0,00004\ 03478 \end{array}\right\} = 1,00015\ 965\ \underline{122}$$

risultamento esatto sino alla 9.a decimale inclusivamente.

Es.° 2.° Si dimanda $\sqrt[5]{161900}$.

Il log. del n.° richiesto essendo

$\frac{1}{5} \log. 161900 = 1,0418493 = L$

si ha
$$\begin{array}{rl} 1,0791812=L_{,,}\ , & 1,0418493=L \\ -1,0413927=L_{,}\ , & -1,0413927=L_{,} \\ \hline 0,0377885 & .\quad 0,0004566 \end{array}$$

$$h=\frac{4566}{377885}=0,012\ldots,\ n=11,012,\ \log.\ n=1,0418662$$

$$\Delta=-0,0000169;\ \frac{\Delta}{\mu}=\begin{Bmatrix} 0,000023025 \\ 13815 \\ 2072 \end{Bmatrix}=-0,0000389;$$

$$\delta n=11,012\times-0,0000389=-0,0004283668:$$

N ossia $\sqrt[5]{161900}=11,012-0,00042836=11,01157164\ldots$ valore, che prendendo le sole prime cinque decimali differisce dal vero meno di 0, 0032.

Es.° 3.° Qual è il valore di $(2,718)^{6,318677}$?

Si ha $6,318677\ \mathrm{l}.2,718=6,318677\times0,4342495=2,7438823$

$$\begin{array}{ll} L_{,,}=2,7442930 & (=\log.\ 555) \\ L_{,}=2,7435098 & (=\log.\ 554) \\ \hline 0,0007832 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} L=2,7438823 & (=\log.\ N) \\ L_{,}=2,7435098 & (=\log.\ 554) \\ \hline 0,0003725 & \end{array}$$

$$h=\frac{3725}{7832}=0,4\ldots;\ n=554,4;\ \log.\ n=2,7438232:$$

$$\Delta=\begin{Bmatrix} 2,7438823 \\ -2,7438232 \end{Bmatrix}=0,0000591;$$

$$\frac{\Delta}{\mu}=\begin{Bmatrix} 0,00011512 \\ 2072 \\ 23; \end{Bmatrix}\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^2=0,0000000$$

$$=0,00013607$$

$\delta n = 554,4 \times 0,0001\,3607 = 0,0754372$;

N ossia $(2,718)^{6,318677} = 554,4754372$.

Se il log. dato è negativo, per es.° $-1,512986$, si cerca un n.° N tale che sia log. $N = 1,512986$ ed $\frac{1}{N}$ è il n.° richiesto.

Nel caso attuale si troverà

$N = 32,5826590$, $\frac{1}{N} = 0,030691$.

Qualora il log. dato L sia molto <1 riesce opportuna la serie (H) del §. 133. (*). Volendosi per es.° il n.° che corrisponde al log. tabulare, 0,00001 e però al log. Neperiano

$$0,00002\ 30258\ 50929\ 9405,$$

si ha

$$\begin{array}{lrr} & \log. c = 0, & 00002\ 30258\ 50929\ 9405\ ; \\ & \tfrac{1}{2}\overline{\log. c}^{2} = 0, & 2\ 65094\ 9055, \\ & \tfrac{1}{6}\overline{\log. c}^{3} = 0, & 2\ 0347\ . \\ \hline \text{Somma} & 0, & 00002\ 30261\ 16026\ 8807 \end{array}$$

e

$$c = 1,00002\ 30261\ 16026\ 8807\ .$$

§. 138 Nell'introduzione premessa dagl'illustri Prof.ri i PP. *Canovai* e *Del Ricco* alle Tavole di *Gardiner* evvi un ingegnoso, laboriosissimo

(*) La convergenza di questa serie diminuisce rapidamente mentre cresce il logaritmo. Se $L = 2,3025$ ec. $(= \log.^{(n)} 10)$, essa è già molto incomoda, perchè sommando 6 termini, lo che esige un' operosissimo calcolo, in luogo di 10 si ottiene 9,698850. Se il dato log. fosse 6,90775,527 $(= \log.^{(n)} 1000)$ non basterebbero 12 termini per avere un' imperfettissima approssimazione.

metodo, per cui si ha con un illimitato n.° di decimali esatte il n.° corrispondente ad un dato logaritmo. Applicandolo alla determinazione della potenza 2^{64} si vedrà che il solo preparativo degli elementi necessarj esige molto maggior fatica che tutto il calcolo del §. 72. Ciò sia detto per comprovare l'osservazione che facemmo nel §. 130.

Qualunque metodo per calcolare il n.° di un logaritmo non esistente nelle tavole, è approssimativo, perchè un logaritmo dato, dovendo esser finito, non si riferisce (131) ad alcun n.° di tal natura. Quindi è che il metodo logaritmico dà l'esatto valore delle potenze nel solo caso che la mantissa spettante al logaritmo della potenza richiesta trovisi nelle tavole.

§. 139. Oltre le applicazioni che immediatamente derivano dalla natura dei logaritmi (130) altre ve ne sono assai utili ed eleganti le quali traggonsi dalle respettive formole (F), (I) del §. 133.

Facendo nella 1.ª $x = i(a+b+c...)$ si ottiene (*Lagrange* Écoles Norm. T. X.)

$$e^{i(a+b+c\ldots)} = 1 + i(a+b \text{ ec.}) + {}^1\!/_2\, i^2(a+b \text{ ec.})^2 \ldots + \frac{i^n\,(a+b \text{ ec.})^n}{2.3\ldots n}$$

$$\text{Ma } e^{i(a+b+c\ldots)} = e^{ia}\,.\,e^{ib}\,.\,e^{ic} \text{ ec.} = \left(1 + ia + \frac{i^2a^2}{2} + \frac{i^3a^3}{2.3} \ldots + \frac{i^n\,a^n}{2.3\ldots n}\right) \times$$

$$\left(1 + ib + \frac{i^2b^2}{2} + \frac{i^3b^3}{2.3} \ldots + \frac{i^n\,b^n}{2.3\ldots n}\right) \times$$

$$\left(1 + ic + \frac{i^2c^2}{2} + \frac{i^3c^3}{2.3} \ldots + \frac{i^n\,c^n}{2.3\ldots n}\right)$$

ec. ec.

ed il coefficiente di i^n nello sviluppamento di questo prodotto, gli elementi a, b, c, ec. essendo m, è composto di tanti termini della forma

$$\frac{a^\lambda\ b^\mu\ c^\nu\ d^\pi \ldots}{(2.3\ldots\lambda)(2.3\ldots\mu)(2.3\ldots\nu)(2.3\ldots\pi)\text{ ec.}}\ .$$

quante sono le maniere di soddisfare in n.[i] interi all'eq.

$$\lambda+\mu+\nu+\pi \text{ ec.} = n\ .$$

Il n° di cui si tratta è (§62) $= \frac{m(m+1)\ldots[m+n-1]}{2.3\ldots n}$ ed i termini che compongono lo sviluppamento della potenza $(a+b+c \text{ ec.})^n$ restano tutti compresi nella formola

$$\frac{1.2.3\ldots n\, a^\lambda\ b^\mu\ c^\nu\ d^\pi \ldots}{(2.3\ldots\lambda)(2.3\ldots\mu)(2.3\ldots\nu)(2.3\ldots\pi)\text{ ec.}} \quad \ldots\ldots(V)$$

Basta sostituire bx per b, cx^2 per c, ec. se trattisi di formare la potenza

$$(a+bx+cx^2+dx^3 \text{ ec.})^n\ .$$

§. 140. Essendo k un n.° irrazionale qualunque, $=\sqrt[h]{\alpha}$, se si suppone

$(a+x)^k = A+Bx+Cx^2$ ec., siccome

$(a+x)^k = a^k\left(1+\frac{x}{a}\right)^k$ ed $A+Bx+Cx^2$ ec.

$=A\left(1+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}x^2 \text{ ec.}\right)$ si ha mediante la

formola (I) del § 133

$$k\left(\log. a+\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{a^3}\text{ ec.}\right)=\log. A+\frac{x}{A}(B+Cx\text{ ec.})$$
$$-\frac{1}{2}\frac{x^2}{A^2}(B^2+2BCx\text{ ec.})$$
$$\text{ec.}\qquad\text{ec.}$$

e quindi

$$A=a^k,\ B=\frac{kA}{a}=ka^{k-1},\ C=\frac{B^2}{2A}-\frac{kA}{2a^2}=\frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}.\text{ ec.}$$

Dunque lo sviluppamento della potenza irrazionale di un binomio soggiace alla legge stessa che regola lo sviluppamento della formola Newtoniana, ed è

$$(a+x)^{\sqrt[h]{\alpha}}=a^{\sqrt[h]{\alpha}}+\sqrt[h]{\alpha}.a^{\sqrt[h]{\alpha}-1}.x+\frac{\sqrt[h]{\alpha}(\sqrt[h]{\alpha}-1)}{1.2}a^{\sqrt[h]{\alpha}-2}.x^2+\text{ec.}\ldots(U)$$

espressione generale ed inalterabilmente conforme alla formola del binomio, perchè dovendo soddisfare a tutte le ipot. possibili relative ad α, e però anche ad

$$\alpha=1^h,=2^h,=3^h,\ldots.=p^h,$$

non può presentare alcun termine che sia incompatibile col termine generale

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n}a^{m-n}x^n$$

qualora vi si faccia $m=\sqrt[h]{p^h}=p$.

Diminuendo gradatamente α finchè si cangi in $-\beta$ si ottiene

$$(a+x)^{\sqrt[h]{-\beta}}=a^{\sqrt[h]{-\beta}}+\sqrt[h]{-\beta}.a^{\sqrt[h]{-\beta}-1}.x+\frac{\sqrt[h]{-\beta}(\sqrt[h]{-\beta}-1)}{1.2}a^{\sqrt[h]{-\beta}-2}.x^2\text{ ec.}$$

Questo e $\log. a^{\sqrt[h]{-\beta}} = \sqrt[h]{-\beta} \log. a$ sono due risultamenti suggeriti dall' analogia.

§. 141 Mediante la citata serie (I) si ha

$$\log.(a+b\sqrt{-1})^v = v\left\{\log. a + \log.(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})\right\}$$

$$= v\left\{\log. a + \frac{b}{a}\sqrt{-1} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} - \text{ec.}\right\}$$

Suppongasi

$$v\left\{\log. a + \frac{b^2}{2a^2}\text{ec.}\right\} = A \text{ e } v\left\{\frac{b}{a} - \frac{b^3}{3a^3}\text{ec.}\right\} = \pm B$$

e si avrà $\log.(a+b\sqrt{-1})^v = A \pm B\sqrt{-1}$.

Se $v = p + q\sqrt{-1}$ risulta

$$\text{l.}(a+b\sqrt{-1})^{p+q\sqrt{-1}} = (p+q\sqrt{-1})\left\{\text{l.} a + \frac{b}{a}\sqrt{-1} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} \text{ ec.}\right\}$$

Si sommino i prodotti reali

$$p\left\{\log. a + \frac{b^2}{2a^2}\text{ ec.}\right\},\ q\sqrt{-1}\left\{\frac{b}{a}\sqrt{-1} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1}\text{ec.}\right\}:$$

pongasi

$$p\left\{\log. a + \frac{b^2}{2a^2}\text{ ec.}\right\} - q\left\{\frac{b}{a} - \frac{b^3}{3a^3}\text{ ec.}\right\} = A;$$

il coefficiente di $\sqrt{-1}$ ne' prodotti immaginarj

$$p\left\{\frac{b}{a}\sqrt{-1} - \frac{b^3}{3a^3}\sqrt{-1} \text{ ec.}\right\}, q\sqrt{-1}\left\{\log a + \frac{b^2}{2a^2}\text{ec.}\right\} \text{ cioè}$$

$$p\left\{\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}\text{ec.}\right\}+q\left\{\log a+\frac{b^2}{2a^2}\text{ec.}\right\}=B$$

e si otterrà $\log.(a+b\sqrt{-1})^{p+q\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}$.

* §. 142. Alcuni probl., specialmente fra quelli che si riferiscono alla teoria delle combinazioni o delle probabilità, esigono che si appuri il valore di una frazione, i cui termini sono composti di un gran n.° di fattori equidifferenti.

Tal è per es.° il coefficiente del termine 251.esimo della potenza $(a+b)^{500}$, coefficiente la cui espressione si sa essere (§. 64)

$$\frac{500.\ 499.\ 498\ldots\ldots 251}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots 250}.$$

A tal effetto giova risolvere il seg.

Probl. *Si dimanda una formola che dia la somma di una serie di logaritmi spettanti ai consecutivi termini di una lunga progressione aritmetica.*

Abbiasi una progressione aritmetica il cui ultimo termine sia $z-d$ e la ragione $2d$. Preso il log. di ciascun termine s' indichi per $S\log.(z-d)$ la somma di tutti i logaritmi, e pongasi

$$(1)\ldots S\text{l}.(z\text{-}d)=(A\text{l}.z+B)z+Cz^{0}+Dz^{-1}+Ez^{-2}+Fz^{-3}+Gz^{-4}\text{ etc}\ldots$$

Sostituendo $z-2d$ per z, $S\log.(z-3d)$ è la somma di tutti i termini logaritmici meno l'ultimo, e si ha

$$S\log.(z-d)-S\log.(z-3d)-\log.(z-d)=0.$$

Ma la serje (1) dà

$S\,1.(z-3d)=[A\,1.(z-2d)+B](z-2d)+C+D(z-2d)^{-1}+E(z-2d)^{-2}$ etc.

Dunque si ha l'eq.

$\{(A\log.z+B)z+C+Dz^{-1}+Ez^{-2}+Fz^{-3}$ etc.$\}-\{[A\log.(z-2d)+B](z-2d)+C+D(z-2d)^{-1}+E(z-2d)^{-2}$ etc.$\}-\log.(z-d)=0$

che mediante i logaritmi tabulari si cangia in

$$A\mu z\log.z+Bz+C+\frac{D}{z}+\frac{E}{z^2}+\frac{F}{z^3}+\frac{G}{z^4}\text{ etc.}-$$

$$(z-2d)A\mu\left\{\log.z-\frac{2d}{z}-\frac{4d^2}{2.z^2}-\frac{8d^3}{3.z^3}-\frac{16d^4}{4.z^4}-\frac{32d^5}{5.z^5}\text{ etc.}\right\}-$$

$$B(z-2d)-C-\frac{D}{z-2d}-\frac{E}{(z-2d)^2}-\frac{F}{(z-2d)^3}-\frac{G}{(z-2d)^4}\text{ etc.}-$$

$$\mu\left(\log.z-\frac{d}{z}-\frac{d^2}{2z^2}-\frac{d^3}{3z^3}-\frac{d^4}{4z^4}-\frac{d^5}{5z^5}\text{ etc.}\right)=0$$

e siccome $\frac{1}{z-2d}=\frac{1}{z}+\frac{2d}{z^2}+\frac{4d^2}{z^3}+\frac{8d^3}{z^4}$ etc.

$$\frac{1}{(z-2d)^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{4d}{z^3}+\frac{12d^2}{z^4}+\frac{32d^3}{z^4}\text{ etc.}$$

$$\frac{1}{(z-2d)^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{6d}{z^4}+\frac{24d^2}{z^5}+\frac{144d^3}{z^6}\text{ etc.}$$

etc. etc.

riunendo i termini respettivamente affetti da $\log.z$, z^1, z^0, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, etc. si ritrae

$$\mu\{Az-A(z-2d)-1\}\log.z+(B-B)z^1+(C-C+2dB+2dA\mu)z^0+$$

$$(D-4d^2A\mu+2d^2A\mu-D+d\mu)z^{-1}+$$

$$\left(E-4d^3A\mu+\frac{8}{3}d^3A\mu-2dD-E+\frac{d^2\mu}{2}\right)z^{-2}+$$

$(F - \frac{16}{3} d^4 A\mu + \frac{16}{4} d^4 A\mu - 4d^2 D - 4dE + \frac{d^3\mu}{3} - F) z^3 +$

$(G - \frac{32}{4} d^5 A\mu + \frac{32}{5} d^5 A\mu - 8d^3 D - 12d^2 E - 6dF - G + \frac{d^4\mu}{4}) z^4 + \text{etc.}$

Quindi $A.2d - 1 = 0$ ossia $A - \frac{1}{2d} = 0$:

$2dB + 2dA\mu = 0$, cioè $B + \frac{\mu}{2d} = 0$:

$-2d^2 A\mu + d\mu = 0$, cioè $0 = 0$:

$-\frac{4}{3} d^2 A\mu - 2D + \frac{d\mu}{2} = 0$,

vale a dire $D + \frac{d\mu}{3.4} = 0$;

$-\frac{16}{12} d^4 A\mu - 4d^2 D - 4dE + \frac{d^3}{3} \mu = 0$,

ossia $\frac{1}{3} d^3 \mu + 4d^2 D + 4dE = 0$, equivalente ad

$\frac{1}{3.4} d^2 \mu + d D + E = 0$.

Siccome si è trovato $D + \frac{d\mu}{3.4} = 0$ essa dà $E = 0$.

Si ha parimente

$-8d^5 A\mu + \frac{32}{5} d^5 A\mu - 8d^3 D - 6dF + \frac{d^4}{4} \mu = 0$, ossia

$\frac{4}{5} d^3 \mu + 8 d^2 D + 6 F - \frac{d^3}{4} \mu$.

Ma in forza dell'eq. $D + \frac{d\mu}{3.4} = 0$

si ha $6 d^2 D = -\frac{2d^3}{4} \mu$.

Dunque $\frac{4}{5} d^3 \mu - \frac{3}{4} d^3 \mu + 2d^2 D + 6 F = 0$,

e finalmente $3F+d^2 D+\frac{d^3 \mu}{5.8}=0$.

Proseguasi e si avrà

$$(a)\ldots\begin{cases} A-\frac{1}{2d}=0, B+\frac{\mu}{2d}=0, C-C=0, D+\frac{d\mu}{3.4}=0, E=0, \\ 3F+d^2 D+\frac{d^3 \mu}{5.8}=0, G=0, 5H+10d^2 F+d^4 D+\frac{d^5 \mu}{7.12}=0, \\ I=0; 7k+35d^2 H+21d^4 F+d^6 D+\frac{d^7 \mu}{9.16}, L=0, \\ 9M+84d^2 k+126d^4 H+36d^6 F+d^8 D+\frac{d^9 \mu}{11.20}=0, N=0, \text{etc.} \end{cases}$$

Quindi

$$A=\frac{1}{2d}, B=-\frac{\mu}{2d}, D=-\frac{d\mu}{12}, E=0, F=\frac{7D^3 \mu}{360}, G=0,$$

$$H=-\frac{31d^5 \mu}{1260}, I=0, K=\frac{127d^7 \mu}{1680}, L=0, M=-\frac{511d^9 \mu}{1188}$$

$$N=0, O=\frac{1144477}{360360} d^{11}\mu, \text{ etc.}$$

L'eq.[i] (a) soggiacciono ad una legge semplicissima. In fatti i coefficienti numerici de' termini antecedenti all'ultimo, sono quelli de' termini di sito pari nelle respettive potenze dispari di un binomio; e gli ultimi termini

$$\frac{d^{-1} \mu}{1.2}, \frac{d\mu}{3.4}, \frac{d^3 \mu}{5.8}, \frac{d^5 \mu}{7.12}, \frac{d^7 \mu}{9.16}, \frac{d^9 \mu}{11.20}, \text{etc.}$$

sono tutti compresi cominciando dal 2.° nella formola

$$\frac{d^{[1+2(n-1)]}\mu}{[3+2(n-1)][4+4(n-1)]}. \text{ Dunque}$$

$$(2)\ldots. S\,\mathrm{l}.(z-d)=C+\frac{z\,\mathrm{l}.z}{2d}-\frac{\mu z}{2d}-\frac{d\mu}{12z}+\frac{7d^3\mu}{360z^3}-\frac{31d^5\mu}{1260z^5}\text{ etc.}$$

e sono inutili i termini che succedono al 5.° ovvero al 6.° perchè non si fa uso della serie (2) che quando z è un n.° assai grande.

Per determinare la costante C si concepisca un n.° a tale che i n.i

$$a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d,\text{ etc.}$$

sieno altrettanti termini della progressione data, e suppongasi di dover trovare la somma de' logaritmi di tutti i termini della serie stessa compresi fra a e z. Sia per es.° la progressione

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 .... 211 .....

e si voglia la somma de' logaritmi di 100 termini cominciando dal 7.° inclusivamente, che equivale a sommare

log. 13, log. 15, log. 17, ... log. 211.

Abbiamo $d=1$, $z=212$, $a=12$, ed è chiaro che C dev'esser tale che S log. $(z-d)$ svanisca quando vi si fa $z=a=12$. Ciò significa che deesi avere

$$(3)\ldots. C=-\left\{\frac{a\,\mathrm{l}.a}{2d}-\frac{\mu a}{2d}-\frac{d\mu}{12a}+\frac{7d^3\mu}{360a^3}-\frac{31d^5\mu}{1260a^5}\text{ etc.}\right\}$$

espressione equivalente alla somma de' logaritmi di tutti i termini compresi fra o ed a, purchè si prenda positivamente e si completi con la dovuta costante, come ben tosto vedremo. In seguito indicheremo per Z il complesso de' termini che nella serie (2) succedono a C.

Sia richiesta per es.° la somma de'logaritmi de' n.i dispari compresi fra 1000 e 10000, e si debba tener conto di tutte le decimali il cui rango non oltrepassa l'ottavo.

Essendo

$a=1000, z=10000, d=1, \mu=0,434294819$ (135) si ha

$$\frac{z \log. z}{2d} = 20000,00000\,00000$$
$$\frac{7d^3 \mu}{360 z^3} = 0,00000\,00000$$
$$\text{Somma} \quad 20000,00000\,00000$$
$$\frac{-\mu z}{2d} = -\ 2171,47240\,95162$$
$$\frac{-d\mu}{12z} = -\ 0,00000\,36191$$
$$\text{Somma} -\ 2171,47241\,31354 \ (*)$$

Tolta la 2.a somma dalla 1.a si ottiene

$$Z = 17828,52758\,68646.$$

Nello stesso modo si trova
$C=-1282,85272\,28572$. Dunque

$$Z+C=16545,67486\,40074.$$

Volendo i logaritmi de'n.i dispari fra *o e* 10000, ovvero fra *o* e qualunque gran n.°, giova prendere per *a* un n.° pari, semplice e sufficientemente grande, perchè la serie componente il 2.° membro dell'eq. (2) risulti assai rapida. Fatto

(*) Si scrive 4 in fine perché prendendo un maggior n.° di decimali si avrebbe 2171,47241 31353 798....

per es.° $a=20$ si trova che il 1.° membro dell' eq. (2) nell' ipot. di $z=a$ si riduce a

$$\log.3+\log.5+\log.7+3\log.3+\log.11+\log.13$$
$$+(\log.3+\log.5)+l.17+l.19=8,81606\ 16270$$

Passando a calcolare il 2.° membro si trova

$$\frac{a\log.a}{2d}=\frac{20\log.20}{2}=10\times1,30102\ 99956=13,01029\ 99566$$

$$\frac{7d^3\mu}{360a^3}=\frac{7\times0,43429\ 44819}{2880000}=\frac{3,04006\ 13733}{2880000}=0,\ 00000,\ 10555$$

Somma $=13,01030\ 101|21$

$$\frac{\mu a}{2d}=10\mu\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ =4,3429448190$$

$$\frac{d\mu}{12a}=\frac{0,43429\ 44819}{240}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ =0,00180\ 95600$$

$$\frac{31d^5\mu}{1260b^5}=\frac{31\times0,4342944819}{40320000000}=\frac{13,46312\ 89389}{40320000000}=0,00000\ 00033$$

Somma $=4,34475\ 43823$

$$\text{Quindi } Z=\left\{\begin{matrix}13,01030\ 101|21\\-4,34475\ 43823\end{matrix}\right\}=8,66554\ 66298,$$

$$8,81606\ 16270=C+8,66554\ 66298,$$

e finalmente $C=0,15051\ 49962$.

Se vuolsi la somma de' logaritmi de' n.[i] pari fra 0 ed un n.° qualunque facciasi $a=21$ e si avrà $C=0,14856\ 672$.

Qualora si richieda fra i limiti anzidetti la somma de' logaritmi de' n.[i] naturali, siccome

$d=0,5$ giova supporre $a=20,5$. Fatto il calcolo si trova

$$C=0,39908\ 993.$$

Proponiamoci per es.° di determinare la somma de' logaritmi di tutti i n.ⁱ naturali sino a 100 mila inclusivamente, Essendo $2d=1$ si ha $d=0,5$ e $z=100000,5$: quindi

log. $z=5,00000\ 21714$: per conseguenza

$$\frac{z \log. z}{2d} = 500002,71714\ 73838$$
$$C = 0,39908\ 99341$$
$$\text{Somma} = 500003,11623\ 77179$$

$$\frac{\mu z}{2d} = 43429,66533\ 75661$$
$$\frac{d\mu}{12z} = 0,00000\ 01809$$
$$\text{Somma} = 43429,66533\ 77470$$

$$Z+C=\left\{\begin{matrix} 500003,1162377179 \\ -43429,6653377470 \end{matrix}\right\}=456573,45089\ 997.$$

Vogliasi per ultimo es.° il coefficiente del termine 251.^esimo^ di $(a+b)^{500}$, cioè il valore della frazione.

$$\frac{500 \,.\, 499 \,.\, 498 \ldots\ldots 251}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots 250}.$$

con 20 decimali.

Tutto si riduce a determinare separatamente le somme log. 251 + log. 252 .... + log. 500., log. 1 + log. 2 + log. 3 .... + log. 250., ed a sottrarre la 2.ª dalla 1.ª

Posto $z=500,5$, e $d=0,5$ l'eq.[i] (2), (3) danno respettivamente.

$$
\begin{array}{rl}
Z = & 1133\,,\ 68735\ 11410\ 39139\ 91474 \\
C = & -492\,,\ 11133\ 28772\ 45405\ 59518 \\
\hline
Z+C = & 641\,,\ 57601\ 82617\ 93733\ 31956
\end{array}
$$

Questo n.° equivale alla 1.ª somma di cui sopra.

La 2.ª si ottiene mediante le solite eq.[i] (2), (3), ma conviene assegnare alla costante, che indicheremo per C^{I}, il valore dato dalla formola (3). Il risultamento è

$$
\begin{array}{rl}
Z^{\mathrm{I}} = & 492,\ 11133\ 28772\ 45405\ 59518 \\
C^{\mathrm{I}} = & 0,\ 39908\ 99341\ 79057\ 52429\ (*) \\
\hline
Z^{\mathrm{I}} + C^{\mathrm{I}} = & 492,\ 51042\ 28114\ 24463\ 11947.
\end{array}
$$

Dunque

$Z+C-(Z^{\mathrm{I}}+C^{\mathrm{I}})=149,06559\ 54503\ 68370\ 19959$

è il valore richiesto.

CAPITOLO IX.

DELLE SERIE.

ARTIC. I.

Nozioni Generali.

§. 143. Parecchie quantità sottoposte ad una costante legge di successiva derivazione, o provenienti dallo sviluppamento di una determinata funzione, costituiscono una *serie*. Appartengono a queste come casi semplicissimi le progressioni aritmetiche e geometriche.

(*) Basta fare nelle formole (2), (3) $z=251$, $d=0,5$; $a=0,5$.

Prescelti due termini qualunque, per es.° $1, 2x$, se si stabilisce che il 3.° debba equivalere per es.° al prec. moltiplicato per $3x$, più l'antiprec. moltiplicato per $2x^2$, si ottiene

$$1, 2x, 8x^2, 28x^3, 100x^4, \ldots.$$

La medesima serie derivasi altresì dallo sviluppamento di $\frac{1-x}{1-3x-2x^2}$, che in conseguenza dicesi *frazione generatrice* della serie. Così $\sqrt{a+x}$ somministra

$$a^{1/2} + \frac{1}{2a^{1/2}}x - \frac{1}{8a^{3/2}}x^2 + \ldots.$$

In generale ogni metodo inverso è fonte d'innumerabili serie, ordinariamente infinite: sono al contrario tutte serie finite quelle che nascono dai metodi diretti, moltiplicazione, formazione delle potenze, ec. purchè finiti sieno i polinomj a cui si applicano.

Indicando per $f.x$ la funzione generatrice di

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

si è convenuto di chiamare per brevità $f.x$ funzione generatrice di a_n. In fatti $a_n x^n$ è il termine generale della serie (118), e siccome il fattore x^n facilmente si aggiunge, basta $a_{(n)}$, ch'è una determinata funzione di n, indipendente da x, per costituire la derivazione de' successivi termini.

La teoria delle serie, uno de' più vasti ed interessanti rami dell'analisi calcolatrice, mette in correlazione le parti elementari e le trascendenti, e mentre concorre come ausiliare nelle principali indagini dell'une e dell'altre, giova in modo particolare alle seconde, da cui reciprocamente riceve poi nuovi e distinti gradi di perfezione. Attesa l'importanza dell'argomento noi ci proponiamo di trattarne con una sufficiente estensione, proporzionata per altro alle forze del calcolo algebrico, cui ben di rado è permesso di sollevarsi alla sfera della sublime analisi. Il compimento dell'attuale teoria forma una notabil parte del tomo X.

*§. 144. Essendo a_n il coefficiente d'x^n nel lo sviluppamento di $f.x$, quello d'x^n nel respettivo sviluppamento di

$$x^h f.x, \frac{f.x}{x^h}, f.x\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}\ldots+\frac{A_h}{x^h}\right)$$

è $a_{n-h}, a_{n+h}, A_0 a_n+A_1 a_{n+1}+A_2 a_{n+2}\cdots+A_h a_{n+h}$;

è per conseguenza

$$a_{n+h}-a_n,$$

$$a_{n+2h}-2a_{n+h}+a_h,$$

$$a_{n+3h}-3a_{n+2h}+3a_{n+h}-a_h,$$

. . . .

$$a_{n+mh}-ma_{n+\overline{m-1}h}+\frac{m(m-1)}{2}a_{n+\overline{m-2}h}\cdots\pm ma_{n+h}\mp a_h$$

il cofficiente d' x^n nel respettivo sviluppamento di

$$f.x\left(\frac{1}{x^h}-1\right), f.x\left(\frac{1}{x^h}-1\right)^2, f.x\left(\frac{1}{x^h}-1\right)^3, \ldots f.x\left(\frac{1}{x^h}-1\right)^m$$

Sono queste le prime nozioni del così detto *Calcolo delle Funzioni Generatrici*.

§. 145. Ogni frazione generatrice equivale alla somma generale s quando la serie converge e si suppone protratta all' infinito; ne differisce del residuo che sempre succede al termine generale cui la somma s si riferisce, se la serie sia divergente o finita. Si ha per es.°

$$\frac{a}{a-x}=\left\{1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\ldots+\frac{x^n}{a^n}\right\}+\frac{x^{n+1}}{a^n(a-x)}\ldots(1)$$

$$\text{ed } s\left\{=\frac{rt-a}{r-1}=\left(\frac{x}{a}.\frac{x^n}{a^n}-1\right):\left(\frac{x}{a}-1\right)\right\}=\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{a^n(a-x)}\left(=\frac{a}{a-x}-\frac{x^{n+1}}{a^n(a-x)}\right)$$

equivale al 1,° membro dell' eq. (1) nella sola ipot. di $a>x$ ed $n=\infty$, nella quale il residuo $\frac{x^{n+1}}{a^n(a-x)}$ riducesi ad

$$\frac{x^{\infty+1}}{a^\infty(a-x)}=\left(\frac{x}{a}\right)^\infty.\frac{x}{a-x}=0.\frac{x}{a-x}=0(*)$$

(*) Difatto i n.i $\frac{x}{a}$, $\frac{x^2}{a^2}$, ec. diminuiscono successivamente in forza delle proporzioni

$$\frac{x^2}{a^2}:\frac{x}{a}::\frac{x}{a}:1;\quad \frac{x^3}{a^3}:\frac{x^2}{a^2}::\frac{x}{a}:1;\text{ ec.}$$

Quando la serie diverge è $\left(\frac{x}{a}\right)^{\infty} = \infty$, e perchè il fattore $\frac{x}{a-x}$ $\left(= - \frac{x}{x-a}\right)$ è necessariamente un n.° finito, il residuo cresce indefinitamente col n.° n. (*)

Facendo nell' eq. (1) $a = 2, 3$. ec. ed $x=1$ si ritrovano le serie del §. 122. Al contrario se si suppone $a=1$ ed $x=2$ la predetta eq. si cangia in

$$-1 = \{1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^n\} - 2^{n+1}$$

e la serie dentro le sgraffe non è $= -1$ ma bensì $= 2^{n+1} - 1$. In fatti (118)

$$s \left[= \frac{rt-a}{r-1}\right] = \frac{2.2^n - 1}{2-1} = 2^{n+1} - 1 .$$

Nella stessa guisa facendo $x=1$ nell' eq.

$$\frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4} = \{1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 \ldots \pm (2n-1)x^{2n-2}\} \mp \frac{\overline{2n+1}\,x^{2n} + \overline{2n-1}\,x^{2n+2}}{1+2x^2+x^4}$$

si ha $0 = \{1 - 3 + 5 - 7 + 9 \ldots \pm \infty\} \mp \frac{4\infty}{4}$.

È assurdo che la serie $1 - 3 + 5$ ec. protratta all' infinito svanisca, e quando con un metodo legittimo, che dee per altro dipendere dalla frazione generatrice, si trova $1 - 3 + 5$ ec. $= 0$,

(*) Non è dunque permesso d'imitare un moderno Autore, che riguarda la frazione $\frac{a}{m-nx}$ come la somma del suo sviluppamento

$$\frac{a}{m} + \frac{an}{m^2} . x + \frac{an^2}{m^3} . x^2 \ldots + \frac{an^n}{m^{n+1}} x^n .$$

ciò significa che la frazione suddetta, nell'ipot. d'$x=1$ svanisce, cioè che zero è la somma della serie infinita $1-3+5$ ec. presa insieme col residuo. I valori $-1,0$, spettanti alle respettive serie

$$1, 2, 2^2, \ldots\ldots; 1, -3, +5, -7, \text{ec.}.$$

noi li diciamo somme *complementarie* perchè richiedono come loro complemento il residuo, per distinguerli da' limiti propriamente detti (122) con cui non hanno affinità.

La pretesa somma delle serie rappresentate dalla formola $1^m-2^m+3^m-4^m$ ec. (*Soc. Ital. T. II*) è una somma nel senso esposto, e noi abbiamo dimostrato (Tratt. Anal. di Trigon.a ec. p. 29) che gli artifizj co'quali è rintracciata dipendono dalla frazione generatrice.

Nell' ipot. di $n=\infty$ la somma di una serie letterale $a_0+a_1+a_2 \ldots + a_n$ si converte nella frazione generatrice fecendovi $a_{n+1}=0$.

Così la somma generale $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ di

$x+x^2+x^3 \ldots + x^n$ si converte in $\frac{x}{1-x}$, ed è appunto la richiesta frazione generatrice.

Le serie *semiconvergenti*, osservate da *Legendre* (Inst. de France 1809) sono capaci di limite e di somma complementaria.

§. 146. Diconsi *ascendenti* le serie della forma

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\alpha_{,}} + Cx^{\alpha+\alpha_{,}+\alpha_{,,}} \text{ec.}$$

dove α, $\alpha_{,}$, ec. son n.[i] positivi. Affinchè convergano dev'essere x piccolissimo. Sono *discendenti*

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha-\alpha_{,}} + Cx^{\alpha-\alpha_{,}-\alpha_{,,}} \text{ ec.}$$
$$Ax^{-\alpha} + Bx^{-\alpha-\alpha_{,}} + Cx^{-\alpha-\alpha_{,}-\alpha_{,,}} \text{ec.}$$

e convergono quando il valore d'x sia grandissimo,

Si eccettua per rapporto alle prime serie il caso ehe la serie

$$\alpha, \alpha+\alpha_{,}, \alpha+\alpha_{,}+\alpha_{,,}, \text{ ec.}$$

lentamente diverga ed i n.[i] A, B ec. convergano rapidamente, poichè la serie ascendente converge quantunque x non sia di straordinaria picciolezza, e si verifica lo stesso della serie discendente ancorchè x non sia molto grande. Questo fatto analitico sarà comprovato con gli esempj nel Calc. Differenziale.

Nell' ipot. d' x piccolissimo, purchè non si combini una straordinaria picciolezza di A con una simile grandezza di B, C, ec. i termini $Bx^{\alpha_{,}}$, $Cx^{\alpha_{,}+\alpha_{,,}}$, ec. sono trascurabili in confronto di A ed $y\left[=x^{\alpha}\left\{A+Bx^{\alpha_{,}}+Cx^{\alpha_{,}+\alpha_{,,}}\text{ec.}\right\}\right]$ risulta $=Ax^{\alpha}$.

Così $y=\dfrac{x^{\alpha}(A+Bx^{\alpha_{,}}\ldots)}{x^{p}(P+Qx^{p_{,}}\ldots)}$ si riduce ad $y=\dfrac{Ax^{\alpha}}{Px^{p}}$:

formola che svanisce con x se $\alpha > p$, diviene $= \frac{A}{P}$ se $\alpha = p$, ed $= \infty$ se $\alpha < p$ ed $x = 0$.

Posta la 1.ª serie discendente (in cui la 2.ª è compresa) sotto la forma $x^{\alpha}(A + Bx^{-\alpha'}$ ec,) si ha nell' ipot. d' x grandissimo $y = Ax^{\alpha}$.

Se $y = \frac{x^{\alpha}(A + Bx^{-\alpha'} \ldots)}{x^{p}(P + Qx^{-p'} \ldots)}$ si deduce $y = \frac{Ax^{\alpha}}{Px^{p}}$, formola che diviene infinita con x se $\alpha > p$, si riduce ad $\frac{A}{P}$ se $\alpha = p$, e svanisce se $\alpha < p$ ed $x = \infty$. Dunque

Le serie ascendenti e le discendenti, eccettuato qualche caso rarissimo, *si riducono al* 1.° *termine supponendo x piccolissimo nelle prime, grandissimo nelle seconde*.

ARTIC. II.

Sviluppamento diretto ed inverso delle funzioni.

§. 147. Una frazione algebrica, il cui denominatore sia composto di due o più termini, si svolge in serie mediante la divisione, e qualora i termini del denominatore sieno affetti da una diversa potenza di una quantità indeterminata x, come nelle frazioni

$$\frac{a}{b+x}, \quad \frac{a+bx}{c+dx+ex^2}, \text{ ec.}$$

lo sviluppamento richiesto può rappresentarsi con la serie indeterminata $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$, ed i coefficienti si determinano moltiplicando ambedue i membri dell'eq. pel denominatore, e facendo servire alla verificazione della medesima un'adattata ipot. relativa al valore d'x, combinata con qualche opportuno artifizio. Trattandosi per es.° di svolgere la frazione $\frac{a}{b-x}$ pongasi

$$\frac{a}{b-x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n \ldots (2)$$

quindi si deduca

$$a = a_0 b + (a_1 b - a_0)x + (a_2 b - a_1)x^2 \ldots$$

e siccome quest'eq. dee verificarsi indipendentemente da ogni particolar valore d'x, può supporsi $x=0$. In tal caso risulta $a=a_0 b$ cioè $a_0 = \frac{a}{b}$. Soppressi i termini eguali a, $a_0 b$ e fatta la divisione per x resta

$$0 = a_1 b - a_0 + (a_2 b - a_1)x + (a_3 b - a_2)x^2 \ldots$$

e facendo di nuovo $x=0$ si ottiene

$$a_1 = \frac{a_0}{b} = \frac{a}{b^2}; \text{ ec.}$$

L'immediata ipot. d'$x=0$ fatta nell'eq. (2) ci avrebbe dato

$$a_0 = \frac{a}{b}\ ; \ \frac{a}{b-x} - \frac{a}{b} = a_1\, x + a_2\, x^2 \ldots$$

ossia $\frac{a\,x}{b(b-x)} = a_1\, x + a_2\, x^2 \ldots$ eq. che divisa per x dà nell'ipot. d'x=o, $\frac{a}{b^2} = a_1$, ec. come sop.

Se la frazione sia della forma $\frac{a + bx + cx^2 \ldots}{x^m(\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots)}$

s'istituisce l'eq. $\frac{a + bx \text{ ec.}}{\alpha + \beta x \text{ ec.}} = a_0 + a_1\, x$ ec.

e lo sviluppamento finale è

$$a_0\, x^{-m} + a_1\, x^{-m+1} + a_2\, x^{-m+2} \ldots\ldots$$

Per isvolgere una quantità universalmente affetta da un segno radicale s'innalza ciascun membro alla potenza espressa dall'indice del radicale.

Così $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a_0 + a_2\, x^2 + a_4\, x^4 \ldots + a_{2n} x^{2n}$ dà

$$o = \begin{cases} a_0^2 + 2a_0 a_2 \\ -a^2 + \quad 1 \end{cases} \left| x^2 + \begin{matrix} a_2^2 \\ +2a_0 a_4 \end{matrix} \right| x^4 + \begin{matrix} 2a_0 a_6 \\ +2a_1 a_4 \end{matrix} \Big| x^6 \text{ ec.}$$

quindi $a_0 = a$, $a_2 = -\frac{1}{2a}$, $a_4 = -\frac{1}{8a^3}$, $a_6 = -\frac{1}{16a^5}$, ec.

e però $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ ec.

Se si fosse istituita l'eq.

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \text{ ec.}$$

si sarebbe trovato $a_1=0$, $a_3=0$, ec. È dunque talvolta utile un'anticipata cognizione della legge che circoscrive la forma della serie cercata. Vedremo in seg. che tal cognizione è in alcuni casi necessaria, per evitare qualche grav'errore, cui l'ingegnoso *metodo de' coefficienti indeterminati* di cui qui si tratta, andrebbe altrimenti soggetto.

Giova qui notare 1.° che siccome x^m è$=[x_1+(x-x_1)]^m$ la funzione $x^m-x_1{}^m$ può svolgersi in una serie ordinata per le potenze d' $x-x_1$.

2.° Che per essere

$$x^m y^n=[x_1+(x-x_1)]^m[y_1+(y-y_1)]^n$$

la funzione $x^m y^n-x_1{}^m y_1{}^n$ è sviluppabile in una serie ordinata secondo le potenze ed i prodotti successivi de' binomj $x-x_1$, $y-y_1$.

§. 148. Talvolta si ha $y=a_1 x+a_2 x^2 \ldots$ (3) e vuolsi $x=b_1 y+b_2 y^2$ ec.

È questi lo sviluppamento inverso delle funzioni, altrimenti detto *regresso delle serie*.

Sostituita ne' successivi termini dell' eq. (3) l'ipotetica espressione $b_1 y+b_2 y^2$ ec. per x, si ottiene

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l}
=a_1 a_2 & y+a_1 b_2 & y^2+a_1 b_3 & y^3+a_1 b_4 & y^4+a_1 b_5 & y^5 \text{ ec.} \\
-1 & \;+a_2 b_1^2 & \;+2a_2 b_1 b_2 & \;+a_2 b_2^2 & \;+2a_2 b_1 b_4 & \\
 & & \;+a_3 b_1^3 & \;+3a_3 b_1^2 b_2 & \;+2a_2 b_2 b_3 & \\
 & & & \;+a_4 b_1^4 & \;+3a_3 b_1^2 b_3 & \\
 & & & & \;+3a_3 b_1 b_2^2 & \\
 & & & & \;+4a_4 b_1^3 b_2 & \\
 & & & & \;+a_6 b_5 &
\end{array}$$

Quindi $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}$, $b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}$,

$$b_4 = \frac{1}{a_1^7}\left(5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3\right)$$

$$b_5 = \frac{1}{a_1^9}\left(14a_2^4 - 21\, a_1 a_2^2 a_3 + 6a_1^2 a_2 a_4 + 3a_1^2 a_3^2 - a_1^3 a_5\right)$$

ec. ec.

Se la serie proposta sia $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$ si fa $y - a_0 = u$ onde avere $u = a_1 x + a_2 x^2 \ldots$ e si suppone $x = b_1 u + b_2 u^2 \ldots$ Determinati i coefficienti si sostituisce $y - a_0$ per u. Si opera in una maniera consimile per ricavare x espresso per y e viceversa, da un'eq. delle forme

$$a_1 x + a_2 x^2 \text{ ec.} = b_1 y + b_2 y^2 \text{ ec.}$$

$$a_1 x^m y^n + a_2 x^{m_1} y^{n_1} \text{ ec.} = b_1 x^p y^q + b_2 x^{p_1} y^{q_1} \text{ ec.}$$

* §. 149. Data un'eq. algebrica in x, y, svolgere la y in una serie convergente ordinata per le potenze d' x, è un probl. difficile ed interessante.

Abbiasi $ax^m y^n + a'x^{m'} y^{n'} + a''x^{m''} y^{n''}$ ec. $= 0$.

e si ponga $y = Ax^\alpha + Bx^\beta$ etc., α, β etc. essendo qualunque. La convergenza esige che sia x piccolissima e che α, β sieno n.i positivi crescenti, ovvero x grandissima ed α, β etc. n.i negativi, o positivi decrescenti, che dopo un certo punto divengano negativi. Fatta la 1.a ipot. si può assumere per una 1.a approssimazione $y = Ax^\alpha$. La proposta diviene

$$aA^n x^{m+\alpha n} + a'A^{n'} x^{m'+\alpha n'} + a''A^{n''} x^{m''+\alpha n''} + a'''A^{n'''} x^{m'''+\alpha n'''} \text{ etc.} = 0$$

e siccome dee verificarsi per approssimazione fa d' uopo distribuire i termini per ordine di grandezza, e tener conto di quelli che hanno il minimo esponente. Ciò per altro suppone che la trasformata abbia almeno due termini paragonabili fra loro, cioè dello stesso grado, e però tutto si riduce a trovare un valore di α che abbia le due seg. proprietà.

1.° Di rendere uguali fra loro almeno due degli esponenti

$$m+\alpha n, m'+\alpha n', m''+\alpha n'', m'''+\alpha n''' \text{ etc...} (A).$$

2.° Di rendere i termini affetti da essi minori di tutti gli altri.

Per soddisfare alla divisata indagine si paragoni il 1.° termine della serie (A) con ciascuno de' susseguenti, e se ne deducano altrettanti valori α', α'' etc. di α, cioè

$$\alpha'=\frac{m'-m}{n-n'}, \alpha''=\frac{m''-m}{n-n''}, \alpha'''=\frac{m'''-m}{n-n'''}, \text{ etc.}$$

Quindi

$$m'-m=-\alpha'(n-n'), m''-m=-\alpha''(n''-n), m'''-m=-\alpha'''(n'''-n), \text{etc.}$$

Posto $m+\alpha n=\pi$, la serie (A) prende la forma

$$\pi, \pi+(n'-n)(\alpha-\alpha'), \pi+(n''-n)(\alpha-\alpha''), \pi+(n'''-n)(\alpha-\alpha'''), \text{etc....} (B)$$

Si distribuiscano in tal guisa i termini della proposta che i n.[i] $n'-n$, $n''-n$, etc. riescano positivi; diasi ad α il massimo $\alpha^{(\mu)}$ de' valori α', α'', etc. ed il termine della serie (B) affatto da $\alpha^{(\mu)}$ sarà $=\pi$ e minore di tutti gli altri.

Sia per es.° $\alpha^{(\mu)}=\alpha'''$. Il 4.° termine di (B) si riduce a π ed i n.[i] $(n'-n)(\alpha-\alpha')$, $(n''-n)(\alpha-\alpha'')$, etc. mediante la sostituzione di α''' per α risultano positivi. Dunque il massimo valore $\alpha^{(\mu)}$ di α soddisfa ad ambe le condizioni.

Se il probl. può risolversi con altri valori questi debbono essere minori di quello già trovato. Infatti, mettendo in (B) per x un n.° $>\alpha'''$ il 1.° termine diviene $<$ di tutti i susseguenti e la 2.ª condizione non è soddisfatta. Prendasi dunque per α un n.° $<\alpha'''$. I primi tre termini della serie (B) risultano maggiori del 4.° perchè $\alpha-\alpha'''<0$ e $>$ di tutte le differenze negative che possono trovarsi fra le differenze antecedenti. Oltre di ciò, siccome n, n', n'' etc. progrediscono, il n.° $n'''-n$ che moltiplica $\alpha-\alpha'''$ è $>n'-n$, $>n''-n$. Si dee per conseguenza prescindere dai termini antecedenti a quello a cui appartiene il massimo de' valori α', α'', etc. È poi facile il vedere che fra i termini susseguenti ve ne possono essere alcuni minori de' primi già contemplati. La ragione si è che alcune fra le differenze $\alpha-\alpha^{\text{iv}}$, $\alpha-\alpha^{\text{v}}$, ec. possono essere negative, e che le differenze onde si tratta sono moltiplicate per li respettivi n.[i] $n^{\text{iv}}-n$, $n^{\text{v}}-n$, ec. maggiori di quelli che loro corrispondono in quella parte della serie che si è considerata in primo luogo. Per avere una 2.ª soluzione non si dee dunque far capitale che del termine affetto dal massimo valore di α e di quelli che gli succedono. Nell' ipot. di α''' massimo, il termine che dà la 1.ª soluzione essendo il 4.° di (B), la serie da contemplarsi è $m'''+\alpha n'''$, $m^{\text{iv}}+\alpha n^{\text{iv}}$, etc. e questa si dee trattare come la serie (A)

Può succedere che uno stesso valore di α renda eguali fra loro più di due termini. In tal caso si parte per la 2.ª soluzione dal termine più lontano dal 1.°, perchè gli anteriori al predetto termine più lontano lo superano, quando si prende per α un n.° minore del massimo valore trovato con l' operazione antecedente.

Nella 2.ª ipot. d' x grandissima i massimi termini dell' eq. sono affetti dalla più alta potenza d' x, e per trovarli basta determinare α in guisa, che due termini della serie (A) sieno eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri.

A tale oggetto si sceglie il minimo de' valori α', α'', etc. Si può anche sostituire $\frac{1}{t}$ per x e cercare l' espressione d' y in t nell' ipot. di t piccolissima.

Es.° Sia l' eq.

$$a+a'x^3y+a''\frac{y^2}{x}+a'''\frac{y^4}{x^5}+a^{\text{IV}}x^2y^5+a^{\text{V}}\frac{y^6}{x^3}=0.$$

La sostituzione di Ax^{α} per y dà

$$a+a'Ax^{3+\alpha}+a''A^2x^{-1+2\alpha}+a'''A^4x^{-5+4\alpha}+a^{\text{IV}}A^5x^{2+5\alpha}+a^{\text{V}}A^6x^{-3+6\alpha}=0$$

e nell' ipot. d'x piccolissima deesi determinare α in guisa che due de' n.ⁱ

$$\{0,3+\alpha,-1+2\alpha,-5+4\alpha,2+5\alpha,-3+6\alpha\}\ \ldots(1)$$

sieno eguali e minimi. Le solite eq.ⁱ fra il 1.° termine e ciascuno degli altri somministrano

$$\{\alpha'=-3,\alpha''=1/2,\alpha'''=5/4,\alpha^{\text{IV}}=-2/5,\alpha^{\text{V}}=1/2\}\ldots(2)$$

Dunque $\alpha^{(\mu)} = {}^5/_4$. In fatti la sostituzione di questo valore per α cangia la serie (1) in

$$0,\ {}^{17}/_4,\ {}^6/_4,\ 0,\ {}^{33}/_4,\ {}^{18}/_4.$$

Il paragone del termine $-5+4\alpha$ con ciascuno de' due susseguenti dà

$$\alpha' = -3,\ \alpha'' = -1;$$

e riguardando come maggiore quello che meno si allontana dal positivo, cioè -1, riduciamo la serie (1) a

$$0, 2, -3, -9, -3, -9$$

fra' cui termini il 4.° ed il 6.° sono eguali e minimi.

Il 1.° valore di α dà la trasformata

$$a - a'Ax^{17/4} + a''A^2x^{6/4} - a'''A^4 + a^{\text{IV}}A^5x^{33/4} - a^{\text{V}}A^6x^{18/4} = 0$$

e però $a - a'''A^4 = 0$ ossia $A = \sqrt[4]{\frac{a}{a'''}}$. Trovato il termine Ax^α si ponga $Ax^\alpha + y'$ per x nella proposta; fatte le riduzioni scrivasi Bx^β per y' e si determini β e B come sopra: quindi si sostituisca $Bx^\beta + y''$ per y', si scriva Cx^γ per y'', si determini γ, C, etc.

Il 2.° valore -1 di α dà la trasformata

$$a - a'Ax^2 + a''A^2x^{-3} + a'''A^4x^{-9} + a^{\text{IV}}A^5x^{-3} - a^{\text{V}}A^6x^{-9} = 0$$

e se ne deduce $A = \sqrt{-\frac{a'''}{a^{\text{V}}}}$. Bisogna dunque che a''', a^{V} sieno di segno diverso.

Supponendo la x grandissima abbiamo dalla serie (2) $\alpha = -3$ pel valore minimo; e questo cangia la serie (1) in

$$0, 0, -7, -17, -13, -15;$$

dove i due primi termini sono eguali e massimi.

Mediante il paragone del 2.° termine coi susseguenti si ottiene

$$\alpha' = 4, \alpha'' = {}^{8}/_{3}, \alpha''' = {}^{1}/_{4}, \alpha^{IV} = {}^{6}/_{5}$$

Preso il minimo $\alpha''' = {}^{1}/_{4}$ si ha la serie

$$0, {}^{13}/_{4}, -{}^{3}/_{4}, -4, {}^{13}/_{4}, -{}^{8}/_{4}$$

della quale i termini 2.° e 5.° sono eguali e massimi.

Paragonando il 5.° termine della serie (A) col 6.° si trova $\alpha = 5$, si ha la serie

$$0, 8, 9, 15, 27, 27$$

e però 27 è una 3.ª soluzione.

Fatta la sostituzione del 2.° e del 3.° valore di α in Ax^{α} si procede al solito a determinare A e quindi ec.

Se nella serie (A) si trovano due termini affetti da uno stesso multiplo di α come $m^{(\delta)} + \alpha n^{(\lambda)}$ $m^{(\lambda)} + \alpha n^{(\lambda)}$, la relativa grandezza de' termini stessi unicamente dipende dai n.ⁱ $m^{(\delta)}, m^{(\lambda)}$, perciò deesi considerare quello soltanto de' predetti termini che contiene il minore de' nⁱ $m^{(\delta)}, m^{(\lambda)}$, se si è fatta l' ipot. d' x piccolis-

sima: quello che contiene il maggiore se l'ipot. stabilita è quella d'x grandissima. Ciò per es.° succede relativamente all'eq. $a^2-2ay+y^2+bxy=0$ la cui trasformata è

$$a^2-2aAx^\alpha+bAx^{1+\alpha}+A^2x^{2\alpha}=0....(1)$$

e gli esponenti, di cui si dee tener conto nell'ipot. d'x piccolissima, sono $0, \alpha, 2\alpha$. Le solite eq.^{i} danno $\alpha'=0$, $\alpha''=0$; quindi $a^2-2aA+A^2=0$ ed $A=a$. Pongasi nella proposta $a+Bx^\beta$ per y onde avere

$$bax+bBx^{1+\beta}+B^2x^{2\beta}=0.$$

Le solite eq.^{i} danno $\beta'=0$, $\beta''=1/2$. Il 2.° valore di β rende uguali gli esponenti del 1.° e del 3.° termine della trasformata e però si ha $B=\sqrt{-ab}$.

Proseguendo si trova

$$y=a-1/2.bx\pm\sqrt{(-ab)}\sqrt{x}\left(1-1/2.\frac{bx}{4a}+\frac{1.1}{2.4}.\frac{b^2x^2}{4^2a^2}\text{ec.}\right)$$

sviluppamento che coincide con quello dell'espressione

$$y=a-\frac{bx}{2}\pm\sqrt{(b^2x^2-4abx)}$$

risultante dall'immediata soluzione della proposta, purchè si avverta di trasformare $\sqrt{(b^2x^2-4abx)}$ in $\sqrt{(-abx)}\sqrt{\left(1-\frac{bx}{4a}\right)}$

Nell'ipot. d'x grandissima la trasformata (1) dà $\alpha'=-1$, $\alpha''=1$, ed al 1.° valore corrisponde $A=-\frac{a^2}{b}$. Così trovasi $B=-\frac{2a^3}{b^2}$, etc. e la 2.ª soluzione è

$$y = -\frac{a^2}{bx} - \frac{2a^3}{b^2 x^2} - \text{ec.}$$

sviluppamento identico a quello di

$$y = a - \tfrac{1}{2}(bx \pm \sqrt{b^2 x^2 + 4abx})$$

purchè il radicale si cangi in $\tfrac{1}{2}bx(1 - \frac{4a}{bx})^{1/2}$ e si prenda il segno superiore. Si ha lo sviluppamento che corrisponde al segno inferiore con prendere per α il 2.° valore $\alpha'' = 1$. Si cerchi per esercizio l'espressione d'y relativa all'eq.

$$a(x^3 - y^3) + x^3 y = 0 : \text{ cioè}$$

x piccoliss. $\left\{ y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} - \text{ec.} \right.$

x grandiss. $\left\{ \begin{array}{l} y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \frac{55a^{13}}{x^{12}} \text{ ec.} \\ y = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a}} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{8}\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{x^3}} + \tfrac{1}{2}\frac{a^4}{x^3} \text{ ec.} \\ y = -\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a}} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{8}\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{x^3}} + \tfrac{1}{2}\frac{a^4}{x^3} \text{ ec.} \end{array} \right.$

Nel calcolare la 1.ª serie avvertasi che dev'essere $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$, ec.; viceversa quando si tratta delle altre tre. (*Lagrange* Berl. 1768).

ARTIC. III.

Serie Algebriche.

§. 150. Una serie $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots A_n$, i cui termini sieno tali, che facendo

$$A_2-A_1=d_1, A_3-A_2=d'_1, A_4-A_3=d''_1, \ldots A_n-A_{n-1}=d_1^{(n-2)}$$
$$d'_1-d_1=d_2, d''_1-d'_1=d'_2, d'''_1-d''_1=d''_2, \ldots d_1^{(n)}-d_1^{(n-1)}=d_2^{(n-1)}$$
$$d'_2-d_2=d_3, d''_2-d'_2=d'_3, d'''_2-d''_2=d''_3, \ldots d_2^{(n)}-d_2^{(n-1)}=d_3^{(n-1)}.$$

ec. ec.

giungasi ad ottenere $d_m=0$ si distingue col nome di serie algebrica dell' ordine m.esimo

Siccome la serie dell'ordine zero, A_1, A_1 ec. ha per somma generale $s=A_1 n$, e la corrispondente somma della serie di 1.° ordine

$$A_1, A_1+d_1, A_1+2d_1 \text{ ec.}$$

è (114) $=(2A_1+\overline{n-1}\,d_1)\frac{n}{2}$, cioè della forma $a_1 n+a_2 n^2$, l'analogia c' invita a supporre, che la somma generale di qualunque serie algebrica possa esprimersi per

$$s=a_1 n+a_2 n^2+a_3 n^3 \ldots +a_m n^m.$$

In fatti l'espressione di s non può contenere alcun termine della forma $a_p n^{-p}$ perchè nell'ipot. di $n=0$ in vece di $s=0$ si avrebbe $s=\infty$: la suddetta espressione esclude qualsivoglia termine $a_q n^{\frac{q}{r}}$ perchè i termini della serie si suppongono

quantità finite e per conseguenza razionali: nè la irrazionalità del termine addotto può immaginarsi compensata ed elisa in qualunque siasi modo. Il preteso effetto non può aspettarsi dal coefficiente a_q, che per esser costante non può produrre una diversa modificazione nel n.° $n^{\frac{q}{r}}$, il quale soggiace ad una variazione dipendente dal valore di n. Non può supporsi che la irrazionalità di $a_q n^{\frac{q}{r}}$ sia distrutta da un altro termine $a_{q_{,}} n^{\frac{q_{,}}{r_{,}}}$, perchè dovrebb' essere

$$a_q = -a_{q_{,}}\ , q = q_{,}\ , r = r_{,}\ ,$$

il che si oppone all'ipotetica esistenza del termine $a_q \cdot n^{\frac{q}{r}}$.

§. 151. Indicando provvisoriamente per s_n la somma generale di n termini è s_{n-1} la somma di $n-1$ termini. Dunque $s_n - s_{n-1}$ equivale al termine n.^{esimo} e si ha $s_n - s_{n-1} = t$: per conseguenza

$$t = \left\{ \begin{array}{l} a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5 \ldots + a_m n^m \\ -[a_1(n-1) + a_2(n-1)^2 + a_3(n-1)^3 + a_4(n-1)^4 + a_5(n-1)^5 \ldots + a_m(n-1)^m] \end{array} \right.$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots \pm a_m + (2a_2 - 3a_3 + 4a_4 - 5a_5 \text{ ec.})\, n +$$

$$(3a_3 - 6a_4 + 10a_5 - 15a_6 \text{ ec.})\, n^2 + (4a_4 - 10a_5 + 20a_6 - 35a_7 \text{ ec.})\, n^3 +$$

$$(5a_5 - 15a_6 + 35a_7 - 70a_8 \text{ ec.})\, n^4 \ldots\ldots +$$

$$\left(ma_m - \frac{m(m+1)}{2} a_{m+1} + \frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} a_{m+2} \text{ ec.}\right) n^{m-n} \ (*)$$

(*) Vedremo ben tosto che i coefficienti numerici di questa formola sono tutti soggetti ad una legge semplice e costante.

Le ipot. di $n=1$, $n=2$ danno

$$a_1 + a_2 = A_1 \; ; \; a_1 + 3a_2 = A_2 \, .$$

Tolta la 1.ª dalla 2.ª risulta $a_2 = \frac{1}{2}(A_2 - A_1)$ e però $a_1 = \frac{1}{2}(3A_1 - A_2)$: quindi

$$t = 2A_1 - A_2 + (A_2 - A_1)n = A_1 - (A_2 - A_1) + (A_2 - A_1)n = A_1 + (n-1)d_1$$

ed $s = \frac{1}{2}(3A_1 - A_2)n + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)n^2$

$$= A_1 n + \frac{n(n-1)}{2}(A_2 - A_1) = A_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d_1$$

formole che respettivamente coincidono con la 1.ª di t e con la 2.ª di s (114)

Facendo successivamente $n=1$, 2, 3 nella formola di t, ed eguagliando i respettivi risultamenti ad A_1, A_2, A_3 si hanno tre eq.ⁱ di 1.° grado per determinare a_1, a_2, a_3, ed effettuato il calcolo si trova per le serie di 2.° ordine

$$t = A_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{1 \cdot 2} \ldots \ldots (1)$$

$$s = A_1 n + \frac{n(n-1)d_1}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)d_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots \ldots (2)$$

L' analogia suggerisce per le serie dell' ordine l.esimo

$$t = A_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2} \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-l)d_l}{2 \cdot 3 \ldots l} \ldots (3)$$

$$s = A_1 n + \frac{n(n-1)d_1}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)d_2}{2 \cdot 3} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-l)d_l}{2 \cdot 3 \; (l+1)} \ldots (4)$$

ed il calcolo dimostra ch' esse non soggiacciono ad eccezione alcuna

Partendo dal termine A_2 e procedendo sino al termine $(n+1)^{esimo}$, il n.° de' termini consecutivi e l' ordine della serie si conserva lo stesso; per conseguenza, se si suppone verificata la formola esprimente t per le serie di un dato ordine l, dev' essere altresì

$$t = A_2 + (n-1)d'_1 + {}^1/_2(n-1)(n-2)d'_2 \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-l)d'l}{2 \,.\, 3 \ldots (l+1)}$$

Ma $A_2 = A_1 + d_1$, $d'_1 = d_1 + d_2$, $d'_2 = d_2 + d_3$, ... $d'_l = d_l + d_{l+1}$ Dunque

$$t = A_1 + (1 + n-1)d_1 + \left[n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]d_2 \ldots$$

ossia

$$t = A_1 + nd_1 + \frac{n(n-1)}{2}d_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3}d_3 \text{ ec. } \ldots(3')$$

Il passaggio da n ad $n+1$ introduce pertanto ne' coefficienti numerici di t la stessa variazione introdotta dal passaggio anzidetto ne' coefficienti numerici di $(1+x)^{n-1}$, giacchè si sa essere (66)

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = \left(1 + \overline{n+1}\,x + \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^2 \text{ ec.}\right)(1+x)$$

$$= 1 \begin{array}{l} + n+1 \\ + \quad\;\; 1 \end{array} \left| x + \begin{array}{l} n+1 \\ + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{array} \right| x^2 \text{ ec.}$$

Avvertasi che $t = A_n$, che i coefficienti numerici di A_n coincidono nell'ipot. di $n = 2,3.4$, ec. con quelli della formola Newtoniana, poichè

$$A_2 = A_1 + d_1 \,, A_3 = A_1 + 2d_1 + d_2 \,, A_4 = A_1 + 3d_1 + 3d_2 + d_3 \,, \text{ec.}$$

e si concluderà, che siccome i coefficienti numerici della formola esprimente t, e quelli della formola Newtoniana, nel passaggio dà n ad $n+1$ subiscono le stesse variazioni, e d altronde gli uni e gli altri sono identici quando $n=2, 3, 4$, ec. si concluderà dicemmo che l' identità dee verificarsi generalmente qualunque n.° intiero positivo si scelga per n; vale a dire che la formola (3) e perciò anche (3'), ottenuta per t è generale.

Per convincersi che la formola esprimente il valore di s è rigorosamente vera, basta osservare che ogni eccezione di essa necessariamente influirebbe in quella di t che immediatamente ne deriva.

Se i n.[i] d_1, d_2 ec. convergono senza che mai si giunga a $d_m=0$, la serie può dirsi *semi-algebrica* e l' espressione di s ne dà la somma per approssimazione.

§. 152. Tre classi di serie algebriche meritano speciale osservazione; la 1.[a] di 2.° ordine, abbraccia i così detti *numeri poligoni*, n.[i] che si formano sommando successivamente i termini della progressione

$$1, 1+d, 1+2d \ldots 1+(n-1)d.$$

Il termine generale di tutti i n.[i] poligoni è

$[2+(n-1)d]\frac{n}{2}$. Se $d=1$ i n.[i] ottenuti con l'anzidetta operazione costituiscono la serie

$1, 3, 6, 10, 15, \ldots \frac{1}{2}n(n+1)$ e diconsi *trigoni*:

Se $d=2$ ne nasce la serie

$1, 4, 9, 16, 25, \ldots n^2$, de' n.[i] *tetragoni*, ec. ec.

Le figure che si formano distribuendo tanti punti, quante sono le unità de' n.[i] trigoni, tetrag. ec. mostrano il rapporto che i n.[i] di cui si tratta hanno co' respettivi poligoni. La differenza essendo d si hanno i poligoni di $d+2$ angoli.

Progr. Gen.[ci]	Num.[i] Polig. corrisp.	
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ n$	$1, 3, 6, 10, 15 \ldots \frac{n}{2}(n+1)$	trigoni
$1, 3, 5, 7 \cdot 9 \ldots\ 2n-1$	$1, 4, 9, 16, 25 \ldots\ n^2$	tetrag.
$1, 4, 7, 10, 13 \ldots\ 3n-2$	$1, 5, 12, 22, 35 \ldots \frac{n}{2}(3n-1)$	pentag.
$1, 5, 9, 13, 17 \ldots\ 4n-3$	$1, 6, 15, 28, 45 \ldots\ n(2n-1)$	esag,
. . . .	. . . .	
$1, 1+d, 1+2d \ldots (n-1)d+1$	$1, 2+d, 3+3d, 4+6d \ldots n+\frac{n}{2}(n-1)d$	$\overline{d+2}$ agoni

Per rapporto ai n.[i] trigoni abbiamo $A_1 = 1$, $d_1 (= A_2 - A_1) = 2$, $d_2 (= A_3 - 2A_2 + A_1) = 1$, $d_3 = 0$, ec. e però $s = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$.

Per li tetragoni $A_1 = 1$, $d_1 = 3$, $d_2 = 2$, $d_3 = 0$, ec. e però

$$s = n + \tfrac{3}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Così ottiensi per gli altri consecutivi n.[i] poligoni

$$s = n + 2n(n-1) + \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \tfrac{1}{2}n^2(n+1);$$

$$s = n + \tfrac{5}{2}n(n-1) + \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-2) = \frac{n}{2 \cdot 3}(4n^2 + 3n - 1)$$

. . . .

$$s = n + \tfrac{5}{2}n(n-1)(d+1) + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)d. \ (*)$$

(*) Pongasi nella formola (2) $A_1 = 1$, $A_2 - A_1$ ossia $2 + d - 1$ per d_1 ed $A_3 - 2A_2 + A_1$ ossia $3 + 3d - 2(2 + d) + 1$ ch' equivale a d per d_2.

Per formare gli m.[agoni] senza ricorrere alla progressione generatrice scrivasi 1 pel 1.° termine, m pel 2.°; $2m+m-3$ pel 3.°; si prendano le differenze $m-1$, $2m-3$ e siccome il sistema

$$\begin{array}{c} 1,\ m,\ 3m-3\ldots \\ m-1,\ 2m-3\ldots \\ m-2\ldots \end{array}$$

si prosegue con aggiungere $m-2$ al n.° $2m-3$, indi $3m-5$ al n.° $3m-3$ e così in seg. nulla manca per continuare indefinitamente la serie.

Il Senator *Fermat* (Annot. alle Op. di *Diofanto* p. 180) accennò il seg. Teor. *Che qualunque* n.° *equivale alla somma di tre* n.[i] *trigoni o di quattro tetragoni, o di cinque pentagoni* ec.

§. 153. I num.[i] *figurati* costituiscono una 2.[a] classe di serie algebriche.

La 1.[a] serie de' n.[i] poligoni è la 1.[a] de' figurati. La 2.[a] serie si forma sommando i successivi termini della 1.[a] e comprende i così detti n.[i] piramidali: una simil somma de' termini componenti la 2.[a] serie produce quella de' n.[i] trigono-piramidali, ec.

Il prospetto che segue dà un'idea di tutta la classe de' n.[i] *figurati*.

Numeri Figurati.

1,	3,	6,	10,	15,	21	.... $\frac{n}{2}(n+1)$		trigoni.
1,	4,	10,	20,	35,	56	...... $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$		piramid.[li]
1,	5,	15,	35,	70,	126	.. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4}$		trig. pir.[li]
....								
1,	m,	$\frac{3.4.5\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$				..... $\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{2.3\ldots(m-1)}$		......

Il termine generale di ciascuna serie è la somma generale della prec. La formazione di una data serie di n.[i] figurati riesce più spedita sommando il termine n.[esimo] della serie prec. col termine $(n-1)^{esimo}$ di quella che trattasi di formare. In fatti si ha

$$n+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n(n+1)}{2};\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3};\text{ec.}$$

154. La 3.[a] classe di serie algebriche è compresa nella formola

$$a^m, (a+d)^m, (a+2d)^m, \ldots [a+(n-1)d]^m.$$

Senza ricorrere al metodo di *Tommaso Simpson*, ch'è alquanto laborioso e fondato sull'analogia, si ha la somma generale sostituendo nella formola (4) del §. 151. il valore di d_1, d_2, ec. Nell'ipot. di $m=2$ abbiamo

$d_1=2ad+d^2$; $d_2=2d^2$, $d_3=0$, ec. e però

$s_2 = a^2 n + \frac{1}{2} n(n-1)(2ad+d^2) + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) d^2$

ossia $s_2 = \frac{1}{3} d^2 n^3 + \frac{1}{2}(2ad - d^2) n^2 + \frac{1}{6}(6a^2 - 6ad + d^2) n$.

Quando $m=3$ si trova $d_1 = 3a^2 d + 3ad^2 + d^3$; $d_2 = 6(ad^2 + d^3)$, $d_3 = 6d^3$, $d_4 = 0$, ec. e quindi

$s_3 = \frac{1}{4} d^3 n^4 + \frac{1}{2}(2ad^2 - d^3) n^3 + \frac{1}{4}(6a^2 d - 6ad^2 + d^3) n^2 + \frac{1}{2}(2a^3 - 3a^2 d + ad^2) n$

e se $d=1$ si ha $s_3 = \frac{1}{4}(n^2 + n)^2$.

La somma di una serie il cui termine generale sia $An^m \pm Bn^{m_{,}} \pm Cn^{m_{,,}}$ ec. è $= As_m \pm Bs_{m_{,}} \pm Cs_{m_{,,}}$ ec. dove $s_m = 1^m + 2^m + 3^m \ldots$; $s^{m_{,}} = 1^{m_{,}} + 2^{m_{,}} + 3^{m_{,}}$ ec. ec.

Le formole di s_2, s_3 ec. nell' ipot. che sia $d=1$ danno prontamente la somma de' n.i figurati. Trattandosi per es.° de' piramidali, siccome $t = \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n$, risulta

$s = \frac{1}{6} s_3 + \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{3} s = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}(n^2+n)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (n^2 + n)$

cioè $s = \frac{1}{24}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)$.

* §. 155. Ad ogni serie semialgebrica affetta da segni alternativi, esclusivamente compete una singolare prerogativa, ed è, che quantunque rapidamente diverga può trasformarsi in un' altra che ad essa equivalga e sia convergente.

La trasformata risulta convergentissima se la proposta converge.

Abbiasi la serie $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \ldots$ Purchè ci ricordiamo di fare $x=1$ al termine dell' operazione possiamo sostituire in sua vece

$A_1 x - A_2 x^2 + A_3 x^3 - A_4 x^4$ ec. $(=S)$.

Faccciasi $x = \frac{y}{1-y}$ e siccome ne proviene

$$x = y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 \text{ ec.}$$
$$x^2 = y^2 + 2y^3 + 3y^4 + 4y^5 + 5y^6 + 6y^7 \text{ ec.}$$
$$x^3 = y^3 + 3y^4 + 6y^5 + 10y^6 + 15y^7 + 21y^8 \text{ ec.}$$
$$x^4 = y^4 + 4y^5 + 10y^6 + 20y^7 + 35y^8 + 56y^9 \text{ ec.}$$

si avrà

$$s = A_1 y - (A_2 - A_1) y^2 + (A_1 - 2A_2 + A_3) y^3 +$$
$$(A_1 - 3A_2 + 3A_3 - A_4) y^4 + (A_1 - 4A_2 + 6A_3 - 4A_4 + A_5) y^5 \text{ ec.}$$

cioè $s = Ay - d_1 y^2 + d_2 y^3 - d_3 y^4 \ldots \pm d_{n-1} y^n$,

ossia $s = A_1 \frac{x}{1+x} - d_1 \frac{x^2}{(1+x)^2} + d_2 \frac{x^3}{(1+x)^3} - \text{ec.} \ldots (5)$

Pongasi $x=1$ e la proposta sarà trasformata in

$$\tfrac{1}{2} A_1 - \tfrac{1}{4} d_1 + \tfrac{1}{8} d_2 - \tfrac{1}{16} d_3 + \tfrac{1}{32} d_4 \text{ ec.}$$

Volendo una maggiore convergenza si ripete su questa la trasformazione superiore e così in seg.

Sia per es.° la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ ec.

Prese le differenze senza considerare i segni si trova

$$d_1 = -\tfrac{1}{2};\ d_2 = \tfrac{1}{3},\ d_3 = -\tfrac{1}{4},\ d_4 = \tfrac{1}{5},\ \text{ec.}$$

e però $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} \ldots + \frac{1}{n.2^n}$.

Nella stessa guisa si trasforma la serie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ ec. in $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{4}{315}$ — ec.

Può trattarsi con lo stesso metodo qualunque serie divergente non semialgebrica, ma fa d'uopo ripetere più volte la trasformazione onde avere una trasformata assai convergente. Data per es.° la serie *ipergeometrica* (*)

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+1.2.3.4.5-\text{ec.}$$

si trova $d_1=1, d_2=3, d_3=11, d_4=53, d_5=309$, ec. ed

$$s=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\frac{2119}{128}-\frac{16687}{216}\text{ ec.}$$

Sommati i primi due termini $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$ si cerchi la traformata della serie $\frac{3}{8}-\frac{11}{16}$ ec. $=s_1$ onde avere

$$s_1=\frac{3}{2^4}-\frac{5}{2^6}+\frac{21}{2^8}-\frac{99}{2^{10}}+\frac{615}{2^{12}}-\text{ec.}$$

e ripetendo due o tre altre volte l'operazione si avrà mediante la somma della trasformata finale il valore prossimo della serie proposta.

Applicando il metodo del §. attuale ad una serie algebrica si ottiene la funzione generatrice della serie ausiliare e però la somma complementaria della proposta. Sia per es.° la serie di 1.° ordine $1-2+3-4$ ec. Siccome $d_1=1$, $d_2=0$, ec. la formola (5) dà

$$s=\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2},$$ funzione generatrice della serie ausiliare $x-2x^2+3x^3-4x^4$ec.; e fatto $x=1$ si ha $1-2+3-4$ ec. $=\frac{1}{4}$ (somma complem.ª).

(*) È tale quella i cui successivi termini acquistano un egual n.° di fattori. Tratteremo di queste serie nel tomo X.

La proposta essendo $1-2^2+3^2-4^2$ ec. risulta $d_1=3$, $d_2=2$, $d_3=0$, ec. ed

$$s=\frac{x}{1-x}-\frac{3x^2}{(1+x)^2}+\frac{2x^3}{(1+x)^3},$$

e perche questa funzione, facendo $x=1$ si riduce ad $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{2}{8}=0$
si ha $1-2^2+3^2-4^2$ ec. $=0$ (somma complem.^{a})

Qualora si voglia trattare con lo stesso metodo una serie algebrica, i cui termini sieno tutti positivi convien supporre $x=\frac{y}{1+y}$, ed altro non si ottiene che la funzione generatrice. Facendo la prova sulla serie

$$4+15+40+85+156+259 \text{ ec.}$$

si trova $d_1=11$, $d_2=14$, $d_3=6$, ed $s=\frac{x(4-x)(1+x^2)}{(1-x)^4}$, funzione generatrice di $4x+15x^2$ ec.

ARTIC. IV.

Serie Algebrico geometriche.

§. 156. Queste serie equivalgono all' ordinato prodotto di una serie geometrica per una serie algebrica: l'ordine è quello della 2.^{a} accresciuto di un' unità (*).

Indicando la somma generale per

$$s_n=(a_0+a_1 n+a_2 n^2 \ldots+a_m n^m)\, r^n-a_0$$

(*) Nelle applicazioni del Calc. Subl. soddisfaremo all' ipot. che la serie proposta risulti da una serie geometrica e da più serie algebriche di 1.° ordine.

si ha

$t = s_n - s_{n-1}$. Ma $t = (A_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2 \text{ec.})ar^{n-1}$

dove a è il 1.° termine della serie geometrica: Dunque per determinare s altro non si richiede che paragonare i termini affetti dalla stessa potenza di n nell'eq. $s_n - s_{n-1} = t$.

La proposta essendo di 2.° ordine si ha

$$[a_0(r-1) + a_1 + (r-1)a_1 n]\, r^{n-1} = s_n - s_{n-1},$$

$$(A_1 + (n-1)d_1)\, ar^{n-1} = t \text{ e però}$$

$$a_0(r-1) + a_1 + (r-1)a_1 n = a[A_1 + (n-1)d_1].$$

Quindi $a_0 = \frac{a[A_1(r-1) - d_1 r]}{(r-1)^2}$, $a_1 = \frac{ad_1}{r-1}$

ed $s_n = \left\{\frac{a[A_1(r-1) - d_1 r]}{(r-1)^2} + \frac{ad_1 n}{r-1}\right\} r^n - \frac{a[A_1(r-1) - d_1 r]}{(r-1)^2}.$

Sia 2, 20, 128, 740, 3584 ec. risultante dalle due 2, 5, 8 ...; 1, 4, 16 ... e però $A_1 = 2$, $d_1 = 3$, $a = 1$, $r = 4$.

Si ha

$$t = [2 + 3(n-1)]\, 4^{n-1};\ s = (-{}^2/_3 + n)4^n + {}^2/_3$$

Con lo stesso metodo si trova per le serie di 3.° ordine

$$t = [A_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2]\, ar^{n-1}$$

$$s = \left[\frac{2a[A_1(r-1)^2 - d_1(r-1) + d_2 r^2]}{(r-1)^3} + \frac{[2aA_1(r-1) - ad_2(3r-1)]n}{2(r-1)_2} + \frac{ad_2 n^2}{2(r-1)}\right] r^n \frac{-a[A_1(r-1)^2 - d_1(r-1) + d_2 r^2]}{(r-1)^3}$$

Data per es.° la serie

$$\frac{3.2}{2},\ \frac{9.3}{2},\ \frac{18.9}{2.2},\ \frac{30.27}{2.4},\ \frac{45.81}{2.8},\ \text{ec.}$$

composta della serie algebrica $^3/_2$, $^9/_2$, $^{18}/_2$, $^{30}/_2$ ec. e della geometrica 2, 3, $^9/_2$. $^{27}/_4$ ec. è $A_1 = {}^3/_2$, $d_1 = 3$, $d_2 = {}^3/_2$, $r = {}^3/_2$ e però si ha

$$t = (n + n^2)(^3/_2)^n,\quad s = (24 - 9n + 3n^2)(^3/_2)^n - 24.$$

Quest' ultima formola si adatta alla serie

$$\frac{A_1}{b},\ \frac{A_1 \pm d}{br},\ \frac{A_1 \pm 2d}{br^2}, \ldots \frac{A_1 \pm (n-1d)}{b\,r^{n-1}}$$

mediante la sostituzione di $\frac{1}{b}$ per a, di d per d_1, di $\frac{1}{r}$ per r, il che dà

$$s = \left\{\frac{A_1\, r(1-r)-dr}{b(1-r)^2} + \frac{d\,r\,n}{b(1-r)}\right\}\frac{1}{r^n} - \frac{A_1\, r(1-r)-dr}{b(1-r)^2}.$$

Accenniamo per incidenza che qualora le serie componenti sieno due e geometriche entrambe si ha $t = ar^{n-1}\, a'r'^{n-1}$, e posto $s_n = A(r^n\, r'^n - 1)$ risulta $s_n - s_{n-1} = A\, r^{n-1}\, r'^{n-1}(rr' - 1)$ e però $A\, r^{n-1} .\ r'^{n-1}(rr' - 1) = aa'\, r^{n-1}\, r'^{n-1}$. Quindi

$$A = \frac{aa'}{rr'-1} \quad \text{ed} \quad s = \frac{aa'}{rr'-1}(r^n\, r'^n - 1)$$

Questa formola può applicarsi alla serie

$$1 . 3 + 2 . 9 + 4 . 27 + 8 . 81 \text{ ec.}$$

Talvolta giova un adattato artifizio. Volendo

per es.° $s = a^n + 2a^{n-1} + 3a^{n-2} \ldots + (n-1)a^2 + na$
si ha $s(a-1) = a^{n+1} + a^n + a^{n-1} \ldots + a^2 - na$

$$= \frac{a \cdot a^{n+1} - a^2}{a-1} - na$$

cioè $$s = \frac{a^{n+2} - (n+1)a^2 + na}{(a-1)^2}.$$

ARTIC. V.

Serie Algebriche composte.

§. 157. Le serie di cui si tratta posson essere intiere e frazionarie. Le prime si ottengono mediante l'ordinato prodotto di più serie algebriche o di una serie algebrica per più serie qualunque: le altre sono tali, che i loro numeratori formano una serie algebrica, i denominatori sono i prodotti, risultanti dall'ordinata moltiplicazione di un determinato n.° di serie come sopra.

Per adesso noi siamo costretti di limitarci all'ipot. che le serie componenti sieno tutte algebriche. Soddisfaremo all'ipot. che alcuna delle serie componenti sia qualunque, nell'applicazione del Calc. Subl. alla teoria delle serie.

Se le serie componenti sono due si ha nella 1.ª ipot.

$$t = \left(A_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2 \text{ ec.}\right) \times$$
$$\left(A' + (n-1)d' + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d'' \text{ ec.}\right)$$

dove A_1, A' sono i primi termini respettivi; d_1, d' le respettive prime differenze, ec.

Pongasi $s_n = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \ldots + a_m n^m$,

essendo $m =$ al massimo esponente n in t, accresciuto di 1; si faccia successivamente $n = 1, 2$ ec. si paragoni s_1 col 1.° termine della serie proposta, s_2 con la somma de' primi due, ec. e siccome si ottengono m eq.[i] di 1.° grado, affette da a_1, a_2, ec. a_m questi coefficienti restano tutti determinati. Sia per es.° la serie

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 10 \text{ ec.}$$

Le componenti danno $\begin{cases} 3, 5, 7, 9 \ldots 3 + 2(n-1) \\ 1, 4, 7, 10 \ldots 1 + 3(n-1) \end{cases}$

e però $t = [3 + 2(n-1)][1 + 3(n-1)] = 6n^2 - n - 2$.

Dunque $s = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3$, e quindi $a_1 = -3/2$, $a_2 = 5/2$, $a_3 = 2$, $s = 1/2(-3n + 5n^2 + 2n^3)$.

§. 158. Per rapporto alle serie frazionarie ci limitiamo ad alcuni casi molto estesi e generali nella loro specie, cioè;

1.° Che il numeratore sia costante ed il denominatore di ciascun termine composto di due consecutivi termini di una stessa serie algebrica. Per es.° $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$ ec.

Pongasi $s_n = \frac{Ln}{M + Nn}$ e si avrà $t\ (= s_n - s_{n-1}) = \frac{LM}{[M + N(n-1)][M + Nn]}$ I n.[i] M, N si determinano con fare $n = 1, = 2$ in $M + N(n-1)$, e con paragonare il respettivo risultamento al 1° ep

al 2.° termine della serie cui spettano i fattori de' denominatori successivi. Nell'es.° prec. si ha $M=1$, $M+N=2$ e però $N=1$; e perchè dev'essere $LM=1$ si ha pure $L=1$. Quindi

$$=\frac{1}{[1+(n-1)][1+n]}=\frac{1}{n(1+n)}\,,\ s=\frac{n}{1+n}\,.$$

2.° Che i numeratori formino una serie algebrica di 1.° ordine, e ciascun denominatore sia composto di tre termini consecutivi di una serie dello stess'ordine, con la condizione che nel passaggio da un denominatore all'altro si escluda il 1.° fattore del denominatore prec.

Per es.° $\frac{1}{2.5.8}+\frac{3}{5.8.11}+\frac{5}{8.11.14}$ ec.

Pongasi $s_n=\frac{In+Ln^2}{[M+(n-1)N][M+nN]}$ e deducasi

$$t=\frac{M(I-L)+[L(2M-N)-IN]n}{[M+(n-2)N][M+(n-1)N][M+nN]}\,.$$

Determinati i n.i M, N come sopra, si appurano I ed L con fare $n=1$, $=2$ in s_n, e con paragonare i risultamenti al 1.° termine, ed alla somma de' primi due termini della serie proposta.

Nell'es.° addotto si ha

$I=-7/10$, $L=12/10$ $M=5$, $N=3$ ed

$$s_n=\frac{-7/10+12/10\,n}{[5+3(n-1)][5+3n]}=\frac{-7/10+12/10\,n}{10+21n+9n^2}\,.$$

3.° Che la serie de' numeratori sia algebrica di 2.° ordine e ciascun denominatore composto di quattro termini consecutivi di una serie di 1.° ordine.

$$\text{Facciasi } s_n = \frac{Hn + In^2 + Ln^3}{[M+(n-2)N][M+(n-1)N][M+nN]} .$$

ed operando al solito si avrà

$$t = \frac{H - I + L + [M(2I-3L)+N(L+H)]n + [3L(M-N)+IN]n^2}{[M+(n-3)N][M+(n-2)N][M+(n-1)N][M+nN]}$$

Queste formole possono applicarsi alla serie

$$\frac{1}{4.7.10.13} + \frac{7}{7.10.13.16} + \frac{17}{10.13.16.19} + \frac{31}{13.16.19.22} \ldots \text{ec.}$$

$$\text{e si ottiene } t = \frac{2n^2 - 1}{(1+3n)(4+3n)(7+3n)(10+3n)} ,$$

$$s_n = \frac{101n^3 + 147n^2 - 38n}{840(4+3n)(7+3n)(10+3n)}$$

4.° Che i numeratori formino una serie di 1.° ordine e ciascun denominatore equivalga al prodotto di due consecutivi termini di una serie di 2.° ordine.

Ciò si verifica per es.° nella serie

$$\frac{1}{2^2.5^2} + \frac{3}{5^2.8^2} + \frac{5}{8^2.11^2} + \frac{7}{11^2.14^2} + \text{ec.}$$

$$\text{Pongasi } s_n = \frac{In + Ln^2}{M + Nn + Pn^2} \text{ e si avrà}$$

$$t = \frac{M[l-L] + [L(2M-N) + lP]n + [LN - lP]n^2}{[M + Nn + Pn^2][M + N(n-1) + P(n-1)^2]}$$

cioè nell' es.° addotto

$$t = \frac{1 + 2(n-1)}{[4 + 21(n-1) + 9(n-1)(n-2)][25 + 39(n-1) + 9(n-1)(n-2)]},$$

$$s_n = \frac{12n + 13n^2}{100\,[25 - 39(n-1) + 9(-1)(n-2)]}.$$

L'analogia c' invita a far qui menzione delle serie *Simpsoniane*, la cui somma ottiensi con un semplice artifizio.

Le serie onde si tratta sono

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \text{ ec.} \ldots\ldots = \frac{1}{1.1}$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} \text{ ec.} \ldots = \frac{1}{1.2.2}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} \text{ ec.} = \frac{1}{1.2.3.3}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} \text{ ec.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$$

ec. ec.

Qualunque sia la somma di $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$ ec. se si fa $= s$ risulta $1/2 + 1/3$ ec. $= s - 1$, e tolta questa eq. dalla prec. si ha la 1.ª serie Simpsoniana con la respettiva somma. La semidifferenza dell'eq.ⁱ

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}$ ec. $= 1$, $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}$ ec. $(= 1 - \frac{1}{1.2}) = \frac{1}{2}$ dà la 2.ª serie Simpsoniana con la corrispondente somma $\frac{1}{1.2.2}$, e così in seg. Può vedersi l'Opera di *Tommaso Simpson*, intitolata; *Essays on several curious and useful subjects in speculative and mix'd Mathematicks.*

ARTIC. VI.

Serie Ricorrenti.

§. 159. È ricorrente quella serie il cui termine n.^{simo} si deduce dagli m prossimi antec.; moltiplicando ciascuno per una determinata quantità numerica o letterale. Il n.° m costituisce l'ordine della serie. Si ha per es.°

$c - cx + cx^2 - cx^3 \ldots \pm cx^n$ { serie ricor. di 1.° ord.
(6).... $1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 \ldots$ { serie ricor. di 2.° ord.

perchè ogni termine della 1.ª è uguale al prec, moltiplicato per $-x$; ogni termine della 2.ª equivale al prec. moltiplicato per $3x$, più l'antiprec. moltiplicato per $2x^2$. I moltiplicatori necessarj alla produzione de' successivi termini costituiscono la così detta *scala di relazione*. Per es.° $\{3x, 2x^2\}$ formano la scala della serie (6).

§. 160. Per sollevarci a nozioni e simboli generali, e per introdurre nel calcolo una sem-

plice ed elegante simmetria, supponngansi ridotte le frazioni generatrici alle respettive forme

$$\frac{a_0}{1+\alpha_1 x},\ \frac{a_0+a_1 x}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2},\ \frac{a_0+a_1 x+a_2 x^2}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3},\text{ec.}$$

Ciascuna facciasi $=A_0+A_1 x+A_2 x^2 \ldots + A_n x^n$, ipot. ammissibile perchè le potenze d'x nello sviluppamento di

$$(a_0+a_1 x \text{ ec.})(1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2 \text{ ec.})^{-1}$$

sono intiere positive, e tolto il denominatore si deduca respettivamente

$$\text{I}\ldots.\ a_0 = A_0 + \begin{array}{l|} A_1 \\ +A_0\alpha_1 \end{array}\, x + \begin{array}{l|} A_2 \\ +A_1\alpha_1 \end{array}\, x^2 + \begin{array}{l|} A_3 \\ +A_2\alpha_1 \end{array}\, x^3 \ldots + \begin{array}{l|} A_n \\ +A_{n-1}\alpha_1 \end{array}\, x^n$$

$$\text{II}\ldots a_0+a_1x = A_0 + \begin{array}{l|} A_1 \\ +A_0\alpha_1 \end{array}\, x + \begin{array}{l|} A_2 \\ +A_1\alpha_1 \\ +A_0\alpha_2 \end{array}\, x^2 + \begin{array}{l|} A_3 \\ +A_2\alpha_1 \\ +A_1\alpha_2 \end{array}\, x^3 \ldots + \begin{array}{l|} A_n \\ +A_{n-1}\alpha_1 \\ +A_{n-2}\alpha_2 \end{array}\, x^n$$

$$\text{III}\ldots a_0+a_1x+a_2x^2 = A_0 + \begin{array}{l|} A_1 \\ +A_0\alpha_1 \end{array}\, x + \begin{array}{l|} A_2 \\ +A_1\alpha_1 \\ +A_0\alpha_2 \end{array}\, x^2 \ldots + \begin{array}{l|} A_n \\ +A_{n-1}\alpha_1 \\ +A_{n-2}\alpha_2 \\ +A_{n-3}\alpha_3 \end{array}\, x^n$$

ec. ec.

Il 1.° sviluppamento dà

$$(7)\ldots\{A_0=\alpha_0,\ A_1+A_0\alpha_1=0,\ A_2+A_1\alpha_1=0, \ldots A_n+A_{n-1}\alpha_1=0\}$$

Dunqne ogni termine $A_n x^n$ è $=$ al prec. $A_{n-1}x^{n-1}$ moltiplicato per $-\alpha_1 x$, la serie è di 1.° ordine e si ha

$$\frac{a_0}{1+\alpha_1 x}=a_0(1-\alpha_1 x+\alpha_1^2 x^2-\alpha_1^3 x^3 \ldots \pm \alpha_1^n x^n)\ (\text{progr. geom.})$$

Esaurito negli altri due sviluppamenti il confronto de' termini componenti il numeratore, confronto che qualora si conosca la frazione generatrice, determina altrettanti coefficienti A_0, A_1, ec. si stabilisce fra' coefficienti relativi allo sviluppamento II un'eq. caratteristica della forma

$$A_n + A_{n-1}\alpha_1 + A_{n-2}\alpha_2 = 0 :$$

fra quelli dello sviluppamento III un' eq. della forma

$$A_n + A_{n-1}\alpha_1 + A_{n-2}\alpha_2 + A_{n-3}\alpha_3 = 0 ,$$

la serie è nel 1.° caso di 2.° ordine, di 3.° nel 2.° In generale per una frazione razionale qualunque

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{m-1} x^{m-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_m x^m} ,$$

l'eq. che determina l' ordine m.esimo della ricorrenza è

$$(8) \ldots A_n + A_{n-1}\alpha_1 + A_{n-2}\alpha_2 \ldots + A_{n-m}\alpha_m = 0 .$$

Qualunque termine $A_n x^n$ è dunque espresso per gli m termini prec. mediante l' eq.

$$A_n x^n = A_{n-1} x^{n-1} \times -\alpha_1 x^1 + A_{n-2} x^{n-2} \times -\alpha_2 x^2 \ldots + A_{n-m} x^{n-m} \times -\alpha_m x^m .$$

La somma de' termini $-\alpha_1 x$, $-\alpha_2 x^2$, ec. componenti la scala di relazione, mutati i segni ed aggiunto 1, costituisce il denominatore della frazione generatrice. Così per rapporto alla serie

$1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4$ ec.

è $A_n x^n = A_{n-1} x^{n-1} \times 3x + A_{n-2} x^{n-2} \times 2x^2$.

La scala essendo $3x$, $2x^2$, il denominatore della frazione generatrice si trova $= 1 - 3x - 2x^2$: il numeratore si ricava dall' eq. II. che dà

$a_0 = A_0 = 1$ ed $a_1 = A_1 + A_0 \alpha_1 = 2 + 1 \times -3 = -1$.

Una serie ricorrente dell' ordine m è determinata 1.° se oltre la scala di relazione si hanno tanti termini, partendo dal 1.° inclusivamente, quanti sono quelli della scala. In fatti il n.° di questi eguaglia il n.° de' termini componenti il numeratore; ed il n.° dell' eq.[i] comparative

$a_0 = A_0$, $a_1 = A_1 + A_0 \alpha_1$, $a_2 = A_2 + A_1 \alpha_1 + A_0 \alpha_2$; ec.

eguaglia quello de' coefficienti a_0, a_1, del numeratore.

È determinata 2.° se abbiansi $2m$ termini, partendo dal 1.° inclusivamente. Si ha per es. nelle serie di 2.° ordine

$$a_0 = A_0 ,\ a_1 = A_1 + A_0 \alpha_1 ;$$

$$A_2 + A_1 \alpha_1 + A_0 \alpha_2 = 0 ,$$

$$A_3 + A_2 \alpha_1 + A_1 \alpha_2 = 0 ; \text{ quindi}$$

$$\alpha_1 = \frac{A_0 A_3 - A_1 A_2}{A_1^2 - A_0 A_2} ; \alpha_2 = \frac{A_2^2 - A_1 A_3}{A_1^2 - A_0 A_2} ;$$

$$\text{ed } a_1 = \frac{A_1^3 - A_0^2 A_3}{A_1^2 - A_0 A_2} .$$

Queste formole possono sperimentarsi nella serie $1+2x+8x^2+28x^3$ ec. la cui frazione generatrice si vide (143) essere $= \frac{1-x}{1-3x-2x^2}$.

Per adattare i metodi ch'esporremo alle serie numeriche basta supporre provvisoriamente moltiplicato il 2.° termine per x il 3.° per x^2, ec.

Prima d'inoltrarci osserviamo che siccome si ha

$$\frac{a_0}{1+\alpha_1 x}+\frac{b_0}{1+\beta_1 x}=\frac{a_0+b_0+(a_0\beta_1+b_0\alpha_1)x}{1+(\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1\beta_1 x^2},$$

funzione della forma

$$\frac{a_0+a_1 x}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2},$$

ogni serie ricorrente di 2.° ordine equivale alla somma di due progressioni geometriche.

§. 161 Veduto che ogni frazione razionale genera una serie ricorrente, giova rintracciare se la proposizione reciproca sussista.

Sostituendo successivamente nell' eq. (8) $m, m+1$, ec. $m+n$; per n, si ottiene

$$(9)\ldots\begin{cases}(A_m+A_{m-1}\alpha_1+A_{m-2}\alpha_2\ldots+A_1\alpha_{m-1}+A_0\alpha_m)x^m=0\\(A_{m+1}+A_m\alpha_1+A_{m-1}\alpha_2\ldots+A_2\alpha_{m-1}+A_1\alpha_m)x^{m+1}=0\\(A_{m+2}+A_{m+1}\alpha_1+A_m\alpha_2\ldots+A_3\alpha_{m-1}+A_2\alpha_m)x^{m+2}=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\(A_{m+n}+A_{m+n-1}\alpha_1+A_{m+n-2}\alpha_2\ldots+A_{n+1}\alpha_{m-1}+A_n\alpha_m)x^{m+n}=0\end{cases}$$

Ma la somma delle colonne verticali, partendo dalla destra, ed avvertendo che α_0 è $=1$, dà

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_n x^n)\alpha_m x^m +$$

$$(A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots + A_{n+1} x^{n+1})\alpha_{m-1} x^{m-1} +$$

$$(A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 \ldots + A_{n+2} x^{n+2})\alpha_{m-2} x^{m-2} +$$

. . . .

$$(A_m x^m + A_{m+1} x^{m+1} \ldots + A_{m+n} x^{n+m}) x^{m-m}$$

Dunque se dicesi F la frazione generatrice risulta

$$F.\alpha^m x^m + (F - A_0)\alpha_{m-1} x^{m-1} + (F - A_0 - A_1 x)\alpha_{m-2} x^{m-2} \ldots +$$

$$F - A_0 - A_1 x \ldots - A_{m-1} x^{m-1} = 0 \quad \text{ed}$$

$$F = \frac{A_0 + A_1 x \ldots + A_{m-1} x^{m-1} \ldots + (A_0 + A_1 x)\alpha_{m-2} x^{m-2} + A_0 \alpha_{m-1} x^{m-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_m x^m}$$

Siccome la considerazione del residuo quando $A_0 + A_1 x$ ec. diverge, non altera la natura del risultamento, si può stabilire che ogni serie ricorrente deriva dallo sviluppamento di una frazione razionale.

§. 162. Soppresso nell'eq.ⁱ (9) il respettivo fattor comune x^m, x^{m+1}, ec. si sommino le colonne verticali partendo dalla sinistra, pongasi s per $A_0 + A_1 x$ ec. scrivasi μ per $m+n$ e però $\mu - m$ per n, e si avrà

$$s = \frac{\left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1 \ldots + A_{m-1} + \alpha_1 (A_0 \ldots + A_{m-2} + A_\mu) + \alpha_2 (A_0 \ldots + A_{m-3} \ldots \\ + A_{\mu-1} + A_\mu) \ldots + \alpha_m (A_{\mu-m+1} + A_{\mu-m+2} \ldots + A_{\mu-1} + A_\mu) \end{array}\right\}}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_m}$$

formola che dipende dai primi e dagli ultimi m termini.

§. 163. Il termine generale, il cui valore è necessario anche per appurare quello di s, si determina facilmente se trattisi delle serie di 1.° e di 2.° ordine. In fatti le prime sono progressioni geometriche (160), le seconde equivalgono alla somma di due progressioni come sopra; indicando queste per

$$h(1+ix+i^2x^2...),\ k(1+lx+l^2x^2...),$$

la serie proposta per A_0+A_1x ec. si ha (10) ... $\{h+k=A_0,\ hi+kl=A_1\}$; $hi^2+kl^2=A_2$; e perchè $hi^2=hi(i+l)-hil$; $kl^2=kl(i+l)-kil$, risulta

$$A_2=(i+l)(hi+kl)-il(h+k)=(i+l)A_1-ilA_0.$$

Ma (160 n.° II.) $A_2=-A_1\alpha_1-A_0\alpha_2$. Dunque

$$i+l=-\alpha_1\left(=\frac{A_1}{A_0}\right),\ i.l=\alpha_2\left(=\frac{A_1^2-A_0A_2}{A_0}\right).$$

I n.ⁱ i, l sono per conseguenza le risolventi di $u^2+\alpha_1u+\alpha_2=0$ (89) eq. equivalente ad $1+\alpha_1x+\alpha_2x^2=0$ se vi si mette $\frac{1}{u}$ per x. Dall' eq.ⁱ (10) si ritrae

$$h=\frac{A_0l-A_1}{l-i},\quad k=\frac{A_1-A_0i}{l-i}:$$

Dunque $A_nx^n=\left\{\frac{A_0l-A_1}{l-i}i^n+\frac{A_1-A_0i}{l-i}l^n\right\}x^n$

Sia per es.° $1+4x+13x^2+40x^3$ ec. Siccome $\alpha_1=-4$, $\alpha_2=3$ si ha l'eq. $u^2-4u+3=0$: quindi

$i=1$, $l=3$, $h=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{3}{2}$; la proposta equivale a

$$\tfrac{3}{2}(1+3x+3^2x^2 \ldots +3^n x^n)-\tfrac{1}{2}(1+x+x^2 \ldots +x^n),$$

e però $A_n x^n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)x^n$; $F=\frac{1}{1-4x+3x^2}$

Con la stessa facilità, se vien data la serie

$$-1+\tfrac{5}{2}x-\tfrac{7}{4}x^2+\tfrac{17}{8}x^3-\tfrac{31}{16}x^4 \text{ ec.}$$

ti trova $A_n x^n = \left(\frac{1}{2^n} \pm 2\right)x^n$, $F=\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2}$.

Se $i=a-b\sqrt{-1}$, $l=a+b\sqrt{-1}$ risulta $l-i=2b\sqrt{-1}$; facendo (76)

$$(a+b\sqrt{-1})^n = e+f\sqrt{-1}\,;\ (a-b\sqrt{-1})^n = e-f\sqrt{-1},$$

si ritrae $l^n-i^n=2f\sqrt{-1}$, $l.i^n-i.l^n=2(be-af)\sqrt{-1}$, e però

$$A_n\ x^n = \{A_0(be-af)+A_1 f\}\frac{x^n}{b}.$$

Qualora le risolventi di $u^2+\alpha_1 u+\alpha_2=0$ sieno eguali, la frazione generatrice è della forma

$\frac{a_0+a^1 x}{(1+\alpha_1 x)^2}$ e basta cercare il termine generale

dello sviluppamento di $(a_0+a_1 x)(1+\alpha_1 x)^{-2}$ per avere

$$A_n x^n = \pm\{(n+1)\, a_0 \alpha_1 - n\, a_1\}\alpha_1^{n-1} x^{n-1}$$

Nelle applicazioni del Calc. Subl. estenderemo il metodo superiore alle serie di qualunque ordine e faremo conoscere tre altri ingegnosi metodi tutti diretti al medesimo scopo.

*§. 164. Talvolta giova conoscere se una serie sia ricorrente: cerchiamo dunque i criterj della ricorrenza (*Lagrange* » Acad. des Sc. de Paris 1772.) Se la serie $A_0+A_1 x$ ec. è ricorrente esiste (161) una frazione razionale F, generatrice della medesima. Fatta l'ipot. che la serie sia di 1.° ordine dev'essere $F=\frac{a_0}{1+a_1 x}$; quindi

$$\frac{1}{F}=\frac{1+a_1 x}{a_0}=\frac{1}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}x=p+qx;$$

è però debbono esistere due n.[i] finiti p, q i quali verifichino l'eq. $\frac{1}{A_0+A_1 x \text{ec.}}=p+qx$,..(11)

Avendosi per es.° $2+4x+8x^2$ ec. si trova $p=\frac{1}{2}$, $q=-1$ e la serie è di 1.° ordine come si sapeva: e perchè $p=\frac{1}{a_0}$, $q=\frac{a_1}{a_0}$ è $a_0=2$, $a_1=-2$ ed $F=\frac{2}{1-2x}$.

Se l'eq. (11) non può verificarsi supponga si che la serie sia di 2.° ordine e facciasi

$$\frac{1}{A_0+A_1 x \text{ec.}}=\frac{1+a_1 x+a_2 x^2}{a_0+a_1 x},$$

Effettuate due divisioni e indicando $A_0 + A_1 x$ ec. per σ si ottiene

$$\frac{1}{\sigma} = p + qx + \frac{a x^2}{a_0 + a_1 x}$$

dove $a x^2$ rappresenta il residuo e si ha

$$p = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{A_0},\ q = \frac{1}{a_0}\left(a_1 - \frac{a_1}{a_0}\right) = -\frac{A_1}{A_0^2}$$ perchè $A_1 = a_1 - a_0 a_1$.

Facendo la stessa operazione per rapporto al 1.° membro ne deriva

$$\frac{1}{A_0} - \frac{A_1 x}{A_0^2} + \frac{\frac{(A_1 A_1 - A_2 A_0) x^2}{A_0^2} + \frac{(A_1 A_2 - A_3 A_0) x^3}{A_0^2} \ldots + \frac{(A_1 A_{n-1} - A_n A_0) x^n}{A_0^2}}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_n x^n}$$

Si rappresenti per σ_1 la serie che costituisce il numeratore e siccome risulta $\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{a}{a_0 + a_1 x}$ si avrà

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a} x = p_1 + q_1 x \ldots \quad (12)$$

e perchè si è trovato altresì

$$\frac{1}{\sigma} = p + qx + \frac{x^2 \sigma_1}{\sigma} \ldots \quad (13)$$

eliminando σ_1 fra questa e l' antec. si avrà

$$\sigma = \frac{p_1 + q_1 x}{(p + q x)(p_1 + q_1^x + x^2} \ (= F).$$

L'eq. (12) è il criterio da cui dipende che la serie proposta sia di 2.° ordine. In questa ipot. la frazione $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ equivale ad una serie di 1.° ordine $\frac{a}{a_0 + a_1 x}$: ottenutane la frazione generatrice basta rovesciarla per avere la richiesta eq. di condizione.

Trattandosi per es.° della serie $-1 + {}^5/_2\, x - {}^7/_4\, x^2 + {}^{17}/_8\, x^3$ ec. che non soddisfa all'eq. (11), deducasi

$$\frac{1}{-1 + {}^5/_2 x - {}^7/_4 x^2 + {}^{17}/_8 x^3 \text{ ec.}} = -1 - {}^5/_2 x + x^2 \frac{\left[{}^{18}/_4 - {}^{18}/_8 x + {}^{54}/_{16} x^2 - {}^{90}/_{32} x^3 \text{ ec.}\right]}{-1 + {}^5/_2 x - {}^7/_4 x^2 \text{ ec.}};$$

pongasi $\frac{x^2\left[{}^{18}/_4 - {}^{18}/_8\, x \text{ ec.}\right]}{-1 + {}^5/_2 x \text{ ec.}} = h + h_1 x$ ec.

e siccome ne deriva $h = {}^9/_2$, $h_1 = 9$, $h_2 = 18$, ec. e la serie di 1.° ordine ${}^9/_2 + 9x + 18x^2 \ldots$ ha per funzione generatrice $\frac{{}^9/_2}{1-2x}$, risulta

$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{1-2x}{{}^9/_2} = {}^2/_9 - {}^4/_9 x$, e la serie data è di 2.° ordine.

Se non si trova $\frac{\sigma}{\sigma_1} = p_1 + q_1 x$ suppongasi

$$\sigma = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3}$$

ed operando al solito se ne deduca

$$\frac{1}{\sigma} = p + qx + \frac{\mathrm{a} x^2 + \mathrm{b} x^3}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2},$$

dove $p = \frac{1}{a_0}$, $q = \frac{1}{a_0}\left(a_1 - \frac{a_1}{a_0}\right)$ come sopra.

Siccome (161) qualunque sia la serie σ sussiste l'eq. (13)

si ha $\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$ e quindi

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = p_1 + q_1 x + \frac{\mathrm{a}_1 x^2}{\mathrm{a} + \mathrm{b}x}, \qquad \text{dove}$$

$$p_1 = \frac{a_0}{\mathrm{a}}, \; q_1 = \frac{1}{\mathrm{a}}\left(a_1 - \frac{a_0 \mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right), \mathrm{a}_1 = a_2 - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\left(a_1 - \frac{a_0 \mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right).$$

Ma sostituendo per σ, σ_1 le respettive serie generali si trova

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = p_1 + q_1 x + \frac{x^2 \sigma_2}{\sigma} \; \ldots \; (14)$$

dove σ_2 è una serie ordinata secondo le potenze d'x. Dunque

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a} + \mathrm{b}x} \text{ e } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}_1} x = p_2 + q_2 x .$$

Si può dunque stabilire che qualora la serie σ sia di 3.° ordine si ha $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = p_2 + q_2 x$. Se ciò si verifica basta eliminare σ_1 e σ_2 fra la prec. e l'eq.[i] (13), (14) per avere

$$F = \frac{(p_1 + q_1 x)(p_2 + q_2 x) + x^2}{(p + qx)(p_1 + q_1 x)(p_2 + q_2 x) + [(p + qx) + p_2 + q_2 x]x^2}$$

Non trovandosi $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ sotto la forma richiesta si suppone σ di 4.º ordine, si deduce

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=p_2+q_2\,x+\frac{x^2\,\sigma_3}{\sigma_2}\,,\ \text{e così ec.}$$

Se σ è ricorrente si dee giungere ad un' eq. della forma

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m+1}}=p_m+q_m x\,,$$

Sia per es.º 1, 1, 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843 ...

Scrivo $\sigma=1+x+3x^2+7x^3$ ec. e deduco $p+q\,x=1-x$; indi

$\sigma_1=-2-4x-11x^2-29x^3-76x^4$ ec., $p_1+q_1\,x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$;

$\sigma_2=-\frac{1}{2}-2x-\frac{11}{2}x^2-\frac{29}{2}x^3-38x^4$ ec., $p_2+q_2\,x=4-8x$

$\sigma_3=-5-15x-40x^2-105x^3$ ec., $p_3+q_3\,x=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}x$

e perchè $\sigma_4=0$ ottengo

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2}=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}x},\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{1}{4-8x+x^2\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}},$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+x^2\frac{\sigma_2}{\sigma_1}},\ \frac{1}{\sigma}=1-x+x^2\ \frac{\sigma_1}{\sigma}$$

$$\sigma=\frac{1-2x+x^2-x^3}{1-3x+x^2}=-2-x+\frac{3-7x}{1-3x+x^2}=$$

$$-2-x+(3+2x+3x^2+7x^3 \text{ec.})=1+x+3x^2+7x^3 \text{ ec.}$$

La serie proposta è dunque di 2.° ordine, la scala di relazione $\{-x^2\ ,\ 3x\}$.

Per liberare il prec. metodo da ogn' ombra d'induzione si ponga

$$\sigma=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2\,....+a_{m-1}x^{m-1}}{1+a_1x+a_2x^2\,....+a_mx^m} \text{ e deducasi}$$

$$\frac{1}{\sigma}=p+qx+\frac{x^2(c_0+c_1x+c_2x^2\,...+c_{m-2}x^{m-2})}{a_0+a_1x+a_2x^2\,....+a_{m-1}x^{m-1}}.$$

Siccome il 1.° membro $\frac{1}{\sigma}$ dev' essere identico col 2.°, effettuando in esso due divisioni parziali, deesi trovare il quoziente $p+qx$ e poi un residuo $x^2\sigma_1$ tale che sia identicamente

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}=\frac{c_0+c_1x+c_2x^2\,....+c_{m-2}x^{m-2}}{a_0+a_1x+a_2x^2\,....+a_{m-1}x^{m-1}}$$

Il 2.° membro di questa eq. dà, rovesciandolo, un quoziente della forma

$$p'+q'x+\frac{x^2(d_0+d_1x+d_2x^2\,...+d_{m-3}x^{m-3})}{c_0+c_1x+c_2x^2\,...+c_{m-2}x^{m-2}}$$

Dunque la divisione di σ per σ_1 dee dare un'espressione identica alla prec. cioè $=p_1+q_1x$ più un residuo espresso per una serie $x^2\sigma_2$ tale, che abbiasi identicamente

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{d_0+d_1x+d_2x^2\ldots+d_{m-3}x^{m-3}}{c_0+c_1x+c_2x^2\ldots+c_{m-2}x^{m-2}}$$ e però $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=$ ec.

Come dà $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ si è ricavata l' espressione di $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ così da questa ricavasi quella di

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{d_0+d_1x+d_2x^2\ldots+d_{m-3}x^{m-3}}{e_0+e_1x+e_2x^2\ldots+e_{m-4}x^{m-4}}\text{, ec.}$$

Ma in questa guisa necessariamente si giunge ad un' eq.

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m+1}}=\frac{l+l_1x}{i}=p_m+q_mx.$$

Dunque se la serie σ equivale allo sviluppamento di una frazione razionale, cioè s' ella è ricorrente, l' ultimo risultamento del metodo è della forma p_m+q_mx.

* §. 165. Nelle applicazioni del Calc. Subl. tratteremo delle serie *ricorrenti doppie*, delle serie *esponenziali* il cui termine generale è $a^x y$, essendo y funz. razionale intiera d' x; delle serie *ipergeometriche*, e delle serie algebrico-differenziali. Ivi mostreremo come ottengasi la somma generale o la funzione generatrice di una serie

$$A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2\ldots+A_nB_n$$

proveniente dall' ordinato prodotto di due serie

$$A_0+A_1x+A_2x^2\ldots;\quad B_0+B_1x+B_2x^2\ldots.$$

nell' ipot. che di queste respettivamente si conosca la somma generale o la funzione generatrice.

Ivi risolveremo in tutta l'estensione il seg. probl. generale, ch'è di somma importanza nell' Astronomìa: Dato un certo n.° di termini y_0, y_1, y_2, ec. di una serie, inserire, senza conoscere il termine generale y_n, un n.° m di medj fra l'uno e l'altro de' successivi termini dati, in guisa che la nuova serie in tal guisa ottenuta sia sottoposta alla legge che caratterizza la serie proposta.

Il metodo che soddisfa al probl. prec. dicesi *metodo diretto d'interpolazione*. Appartiene ad essa il seg.

Probl. Inserire due medj fra i consecutivi termini della serie algebrica di 3.° ordine

$$0, 15, 41, 87, 162, 275, \text{ec},$$

con la condizione che la nuova serie rimanga algebrica dello stess' ordine.

Spetta all'interpolazione *inversa* la soluzione del probl. in cui è dato il valore di un nuovo termine y_m e si cerca l'indice m che gli corrisponde nel sistema

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, \ldots\ldots m, \ldots\ldots n, \\ y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_m, \ldots\ldots y_n. \end{array}$$

CAPITOLO X.

Delle Frazioni continue.

* §. 166. Le frazioni continue di cui diemmo le prime nozioni (52) costituiscono una singolare specie di serie, i cui usi sono di somma importanza nell' analisi calcolatrice: perciò noi passiamo ad esporne in questo luogo la teoria.

Le successive frazioni convergenti che si deducono dalla nota formola $x = a + \frac{1}{a_{,} \text{ ec.}}$ (53) sono

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{aa_{,}+1}{a_{,}}, \quad \frac{(aa_{,}+1)a_{,,}+a}{aa_{,}+1}, \quad \frac{[(aa_{,}+1)a_{,,}+a]a_{,,,}+aa_{,}+1}{(a_{,}a_{,,}+1)a_{,,,}+a_{,}} \text{ ec.}$$

Indicandole respettivamente per $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{a_{,}}{\alpha_{,}}$, $\frac{a_{,,}}{\alpha_{,,}}$, ec. se si deduce $\frac{a}{\alpha} - \frac{a_{,}}{\alpha_{,}}$, $\frac{a_{,}}{\alpha_{,}} - \frac{a_{,,}}{\alpha_{,,}}$, ec. trascurato il denominatore si ottiene

1.° $a\alpha_{,} - a_{,}\alpha = -1$, $a_{,}\alpha_{,,} - a_{,,}\alpha_{,} = 1$, $a_{,,}\alpha_{,,,} - a_{,,,}\alpha_{,,} = -1$, ... $a_{(n)}\alpha_{(n+1)} - a_{(n+1)}\alpha_{(n)} = \pm 1$

dove si prende — se la frazione sottratta è di rango pari. Si ha inoltre

2.° $\frac{a_{,,}}{\alpha_{,,}} = \frac{a_{,}a_{,,}+a}{\alpha_{,}a_{,,}+\alpha}$, $\frac{a_{,,,}}{\alpha_{,,,}} = \frac{a_{,,}a_{,,,}+a_{,}}{\alpha_{,,}a_{,,,}+\alpha_{,}}$, ... $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}} = \frac{a_{(n-1)}a_{(n)}+a_{(n-2)}}{\alpha_{(n-1)}a_{(n)}+\alpha_{(n-2)}}$.

dove $a_{,,} = a_{,}a_{,,}+a$, $\alpha_{,,} = \alpha_{,}a_{,,}+\alpha$; $a_{,,,} = a_{,,}a_{,,,}+a_{,}$, $\alpha_{,,,} = \alpha_{,,}a_{,,,}+\alpha_{,}$; ec.

Se abbiasi per es.° $x=1+{}^1/_4+{}^1/_9+{}^1/_2$ ec. è $\mathrm{a}=1$,

$\alpha=1$, $\mathrm{a}_{,}=5$, $\alpha_{,}=4$, $\mathrm{a}_{,,}=46$, $\alpha_{,,}=37$, $a_{,}=4$, $a_{,,}=9$. $\alpha_{,,,}=2$, ec. Quindi

$\mathrm{a}\alpha_{,}-\mathrm{a}_{,}\alpha=1.4-5.1=-1$, $\mathrm{a}_{,}\alpha_{,,}-\mathrm{a}_{,,}\alpha_{,}=5.37-46.4=1$, ec.

$$\frac{\mathrm{a}_{,,}}{\alpha_{,,}}\left(=1+{}^1/_4+{}^1/_9\right)=\frac{5.9+1}{4.9+1}=\frac{46}{37}, \text{ ec.}$$

Per assicurarci se l' una e l' altra legge sia generale altro non si richiede che supporla verificata per rapporto a tre frazioni convergenti qualunque $\left\{\frac{\mathrm{a}_{(m)}}{\alpha_{(m)}}, \frac{\mathrm{a}_{(m+1)}}{\alpha_{(m+1)}}, \frac{\mathrm{a}_{(m+2)}}{\alpha_{(m+2)}}\right\} \ldots (I)$

(supposizione ammissibile perchè le divisate leggi si verificano nelle prime tre frazioni convergenti) e determinare se le medesime si estendano alla frazione susseguente.

Cominciando dalla legge indicata sotto il n.° 2.° noi osserviamo che siccome si ha

$$\frac{\mathrm{a}_{(m+2)}}{\alpha_{(m+2)}}=a+\cfrac{1}{a_{,}\text{ec.}+\cfrac{1}{a_{(m+2)}}}, \quad \frac{\mathrm{a}_{(m+3)}}{\alpha_{(m+3)}}=a+\cfrac{1}{a_{,}\text{ec.}+\cfrac{1}{a_{(m+2)}+\cfrac{1}{a_{(m+3)}}}}$$

l' espressione di $\frac{\mathrm{a}_{(m+2)}}{\alpha_{(m+2)}}$ cioè $\frac{\mathrm{a}_{(m+1)}\,a_{(m+2)}+\mathrm{a}_{(m)}}{\alpha_{(m+1)}\,a_{(m+2)}+\alpha_{(m)}}$,

qualora vi si sostituisca $a_{(m+2)}+\frac{1}{a_{(m+3)}}$ dev' essere identica con quella di $\frac{\mathrm{a}_{(m+3)}}{\alpha_{(m+3)}}$.

Per conseguenza

$$\frac{\mathrm{a}_{(m+3)}}{\alpha_{(m+3)}}=\frac{\mathrm{a}_{(m+1)}\left(a_{(m+2)}+\frac{1}{a_{(m+3)}}\right)+\mathrm{a}_{(m)}}{\alpha_{(m+1)}\left(a_{(m+2)}+\frac{1}{a_{(m+3)}}\right)+\alpha_{(m)}}\,.$$

Ma $\mathrm{a}_{(m+1)}\, a_{(m+2)}+\mathrm{a}_{(m)}=\mathrm{a}_{(m+2)}$

ed $\alpha_{(m+1)}\, a_{(m+2)}+\alpha_{(m)}=\alpha_{(m+2)}$.

Dunque $$\frac{\mathrm{a}_{(m+3)}}{\alpha_{(m+3)}}=\frac{\mathrm{a}_{(m+2)}+\mathrm{a}_{(m+1)}\cdot\frac{1}{a_{(m+3)}}}{\alpha_{(m+2)}+\alpha_{(m+1)}\cdot\frac{1}{a_{(m+3)}}},$$

cioè $$\frac{\mathrm{a}_{(m+3)}}{\alpha_{(m+3)}}=\frac{\mathrm{a}_{(m+2)}\, a_{(m+3)}+\mathrm{a}_{(m+1)}}{\alpha_{(m+2)}\, a_{(m+3)}+\alpha_{(m+1)}}\,.$$

Resta da provarsi che il numeratore sia primo relativamente ad denominatore. A tale effetto suppongasi, se è possibile,

$$\frac{\mathrm{a}_{(m+2)}\, a_{(m+3)}+\mathrm{a}_{(m+1)}}{k}=h\,,$$

$$\frac{\alpha_{(m+2)}\, a_{(m+3)}+\alpha_{(m+1)}}{k}=h_{,}\,.$$

Fra l' una e l' altra eq. si elimini $a_{(m+3)}$ e siccome ne proviene

$$\frac{kh-\mathrm{a}_{(m+1)}}{\mathrm{a}_{(m+2)}}=\frac{kh_{,}-\alpha_{(m+1)}}{\alpha_{(m+2)}}$$

ossia

$$k(h\alpha_{(m+2)}-h_{,}\mathrm{a}_{(m+2)})=\mathrm{a}_{(m+1)}\alpha_{(m+2)}-\mathrm{a}_{(m+2)}\alpha_{(m+1)}$$

ed il 2.° membro, perchè la legge del n.° 1.° si suppone anch' essa verificata per rapporto alle tre frazioni (I), è $=\pm 1$, risulta

$$h\alpha_{(m+2)}-h_{,}\mathrm{a}_{(m+2)}=\pm\frac{1}{k},$$

il che contraddice perchè h, $h_{,}$, $\alpha_{(m+2)}$, $\mathrm{a}_{(m+2)}$ sono n.i intieri. Dunque il comune divisore k non può ammettersi; quindi

$$\mathrm{a}_{(m+3)}=\mathrm{a}_{(m+2)}\,a_{(m+3)}+\mathrm{a}_{(m+1)},$$

$$\alpha_{(m+3)}=\alpha_{(m+2)}\,a_{(m+3)}+\alpha_{(m+1)}\text{; e però ec.}$$

* §. 167. Presa la differenza $\frac{\mathrm{a}_{(m+2)}}{\alpha_{(m+2)}}-\frac{\mathrm{a}_{(m+3)}}{\alpha_{(m+3)}}$, e soppresso il denominatore, se si sostituisce la respettiva espressione di $\mathrm{a}_{(m+3)}$, $\alpha_{(m+3)}$, si ottiene

$$\mathrm{a}_{(m+2)}\alpha_{(m+3)}-\mathrm{a}_{(m+3)}\alpha_{(m+2)}=$$

$$\mathrm{a}_{(m+2)}\{\alpha_{(m+2)}\,a_{(m+3)}+\alpha_{(m+1)}\}$$

$$-\alpha_{(m+2)}\{\mathrm{a}_{(m+2)}\,a_{(m+3)}+\mathrm{a}_{(m+1)}\}$$

$$=\mathrm{a}_{(m+2)}\alpha_{(m+1)}-\mathrm{a}_{(m+1)}\alpha_{(m+2)}.$$

Ma per ipot. le frazioni (I) danno

$$\mathrm{a}_{(m)}\alpha_{(m+1)}-\mathrm{a}_{(m+1)}\alpha_{(m)}=\pm 1$$

$$\mathrm{a}_{(m+1)}\alpha_{(m+2)}-\mathrm{a}_{(m+2)}\alpha_{(m+1)}=\mp 1$$

Dunque $a_{(m+2)}\alpha_{(m+3)} - a_{(m+3)}\alpha_{(m+2)} = \pm 1$

e la legge posta sotto il n.° 1.° del §. 166. è provata.

* §. 168. Siccome x cade fra due frazioni convergenti consecutive qualunque $\frac{a_{(m)}}{\alpha_{(m)}}$, $\frac{a_{(m+1)}}{\alpha_{(m+1)}}$ (53), l'errore δ che si commette prendendo per x una di esse è $< \frac{1}{\alpha_{(m)}\alpha_{(m+1)}}$, e perchè $\alpha_{(m+1)} > \alpha_{(m)}$, l'errore è $< \frac{1}{(\alpha_{(m)})^2}$ e diminuisce a misura che s'inoltra il rango della frazione convergente.

* §. 169. Essendo $\frac{a_{(m)}}{\alpha_{(m)}}$ l'ultima frazione convergente, e però $= x$, se si sommano per ordine le seg. eq.^{i}

$$\frac{a_{,}}{\alpha_{,}} - \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\alpha_{,}}$$

$$\frac{a_{,,}}{\alpha_{,,}} - \frac{a_{,}}{\alpha_{,}} = -\frac{1}{\alpha_{,}\alpha_{,,}}$$

$$\frac{a_{,,,}}{\alpha_{,,,}} - \frac{a_{,,}}{\alpha_{,,}} = \frac{1}{\alpha_{,,}\alpha_{,,,}}$$

$$\frac{a_{(m-1)}}{\alpha_{(m-1)}} - \frac{a_{(m-2)}}{\alpha_{(m-2)}} = \mp \frac{1}{\alpha_{(m-2)}\alpha_{(m-1)}}$$

$$\frac{a_{(m)}}{\alpha_{(m)}} - \frac{a_{(m-1)}}{\alpha_{(m-1)}} = \pm \frac{1}{\alpha_{(m)}\alpha_{(m-1)}}$$

si ottiene

$$\frac{a_{(m)}}{\alpha_{(m)}} - \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha\alpha_{,}} - \frac{1}{\alpha_{,}\alpha_{,,}} + \frac{1}{\alpha_{,,}\alpha_{,,,}} \dots \pm \frac{1}{\alpha_{(m-1)}\alpha_{(m)}},$$

cioè $x = \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\alpha_{,}} - \frac{1}{\alpha_{,}\alpha_{,,}} + \frac{1}{\alpha_{,,}\alpha_{,,,}} \dots \pm \frac{1}{\alpha_{(m-1)}\alpha_{(m)}}$,

serie convergente che dipende da' soli denominatori

* §. 170 Per procurarci una più compita nozione delle frazioni convergenti giova che ci proponiamo d' investigare da qual condizione dipende che una data frazione $\frac{h}{k}$ si accosti ad x più di una qualunque sua frazione convergente $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$, cosicchè le frazioni $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$, $\frac{h}{k}$, $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$, procedano per ordine di grandezza.

Supponendo $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}} < x$ risulta $a_{(n-1)}\alpha_{(n)} - a_{(n)}\alpha_{(n-1)} = 1$:

Ma $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}} > x$ per ipot. ed $\frac{h}{k}$ accostasi ad x più di $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$. Dunque $\frac{h}{k} < \frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$: perciò $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}} - \frac{h}{k}$ ossia $\frac{a_{(n-1)}k - \alpha_{(n-1)}h}{k\alpha_{(n-1)}} < \frac{1}{\alpha_{(n-1)}\alpha_{(n)}}$

ed $\frac{a_{(n-1)}k - \alpha_{(n-1)}h}{k} < \frac{1}{\alpha_{(n)}}$ .... (15).

Essendo $a_{(n-1)}k-\alpha_{(n-1)}h$ un n.° intiero perchè tali sono $a_{(n-1)}$, k, $\alpha_{(n-1)}$, h; ed essendo un n.° positivo perchè $\frac{h}{k}<\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$, il minimo suo valore è $=1$; per conseguenza $k>\alpha_{(n)}$ e per una più forte ragione $k>\alpha_{(n-1)}$.

Per vedere se h può essere = ovv. $<a_{(n)}$ si ponga in (15) $a_{(n)}$ per h, ed $\alpha_{(n)}+i$ per k. Ne proviene

$$\frac{a_{(n-1)}(\alpha_{(n)}+i)-\alpha_{(n-1)}a_{(n)}}{\alpha_{(n)}+i}<\frac{1}{\alpha_{(n)}}$$ ossia

$$a_{(n-1)}i+1<\frac{\alpha_{(n)}+i}{\alpha_{(n)}}<1+\frac{i}{\alpha_{(n)}},$$

e finalmente $a_{(n-1)}<\frac{1}{\alpha_{(n)}}$ che è assurdo. Dunque non può essere $h=a_{(n)}$ e molto meno $h<a_{(n)}$ perchè se fosse $h=a_{(n)}-l$, la frazione $\frac{h}{k}\left(=\frac{a_{(n)}-l}{k}\right)$ non potrebb' essere $>\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$.

I termini della frazione $\frac{h}{k}$, qualora ella soddisfi alla condizione proposta, sono dunque meno semplici di quelli della data frazione convergente $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$.

Sia $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}>x$ e però $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}<x$ ed $\alpha_{(n-1)}a_{(n)}-a_{(n-1)}\alpha_{(n)}=1$.
Siccome
$\frac{h}{k}>\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$, dev' essere $\frac{\alpha_{(n-1)}h-a_{(n-1)}k}{k}<\frac{1}{\alpha_{(n)}}$ ...(16)

per la ragione addotta sopra, $k > \alpha_{(n)}$, e molto più $k > \alpha_{(n-1)}$. Suppongasi, s' egli è possibile, $h =$ ovv. $< a_{(n)}$.

Sostituendo $a_{(n)}$ per h ed $\alpha_{(n)} + i$ per k in (16) risulta

$$\frac{\alpha_{(n-1)}a_{(n)} - a_{(n-1)}(\alpha_{(n)} + i)}{\alpha_{(n)} + i} < \frac{1}{\alpha_{(n)}} \text{ cioè}$$

$$1 - a_{(n-1)}i < \frac{\alpha_{(n)} + i}{\alpha_{(n)}} < 1 + \frac{i}{\alpha_{(n)}};$$

e perchè il 1.° membro è < 0, qualunque sia l' intiero i non può essere $h = a_{(n)}$ e molto meno $h < a_{(n)}$. Dunque $h > a_{(n)}$, $k > \alpha_{(n)}$ e però una frazione, i cui termini sieno minori di quelli di una frazione convergente, non è più vicina di questa ad x.

Nell' ipot. di $k > \alpha_{(n-1)}$ e $< \alpha_{(n)}$, essendo $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}} - x < \frac{h}{k} - x$ ne deriva

$$a_{(n-1)} - \alpha_{(n-1)}x \left(= \frac{\alpha_{(n-1)}}{k}(h - kx) \right) < h\text{-}kx.$$

Dunque se $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$ è una frazione convergente verso x la formola $a_{(n-1)}\text{-}\alpha_{(n-1)}x$, fatta astrazione da' segni, ha un valore minor di quello che riceve quando per $a_{(n-1)}$, $\alpha_{(n-1)}$ si assume un n.° minore.

* § 171. Quando un quoziente $a_{(n)}$ è > 1, tra le frazioni convergenti successive $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$ $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$ si possono inserire $a_{(n)} - 1$ frazioni inter-

medie. Sia per es.° $a_{(n)}=4$ e sostituendo 1,2,3,4 per $\mathrm{a}_{(n)}$ in $\frac{\mathrm{a}_{(n)}}{\alpha_{(n)}}=\frac{\mathrm{a}_{(n-1)}a_{(n)}+\mathrm{a}_{(n-2)}}{\alpha_{(n-1)}a_{(n)}+\alpha_{(n-2)}}$ si avranno le frazioni intermedie

$$\frac{\mathrm{a}_{(n-1)}+\mathrm{a}_{(n-2)}}{\alpha_{(n-1)}+\alpha_{(n-2)}},\ \frac{2\mathrm{a}_{(n-1)}+\mathrm{a}_{(n-2)}}{2\alpha_{(n-1)}+\alpha_{(n-2)}},\ \frac{3\mathrm{a}_{(n-1)}+\mathrm{a}_{(n-2)}}{3\alpha_{(n-1)}+\alpha_{(n-2)}},\ \frac{4\mathrm{a}_{(n-1)}+\mathrm{a}_{(n-2)}}{4\alpha_{(n-1)}+\alpha_{(n-2)}}$$

e si vedrà come nel §. prec. che ognuna si accosta ad x più di qualunque altra frazione i cui termini sieno più semplici.

*§ 172. Può darsi che la quantità x da svolgersi in frazione continua sia <1: in tal caso si ha $x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a_{,}\ \text{ec.}}}$, le frazioni convergenti sono

$$\frac{1}{a},\ \frac{a_{,}}{aa_{,}+1},\ \frac{a_{,}a_{,,}+1}{(aa_{,}+1)a_{,,}+a},\ \frac{(a_{,}a_{,,}+1)a_{,,,}+a_{,}}{(aa_{,}a_{,,}+a_{,,}+a)a_{,,,}+aa_{,}+1},\ldots$$

e restano tutte comprese nella nota formola

$$\frac{\mathrm{a}_{(n)}}{\alpha_{(n)}}=\frac{\mathrm{a}_{(n-1)}a_{(n)}+\mathrm{a}_{(n-2)}}{\alpha_{(n-1)}a_{(n)}+\alpha_{(n-2)}}.$$

Qualora si deduca

$$\frac{\alpha_{(n-1)}}{\alpha_{(n)}}=\frac{\alpha_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}a_{(n)}+\alpha_{(n-2)}}=\cfrac{1}{a_{(n)}+\cfrac{\alpha_{(n-2)}}{\alpha_{(n-1)}}}$$

$$\frac{\alpha_{(n-2)}}{\alpha_{(n-1)}}=\frac{\alpha_{(n-2)}}{\alpha_{(n-2)}a_{(n-1)}+\alpha_{(n-3)}}=\cfrac{1}{a_{(n-1)}+\cfrac{\alpha_{(n-3)}}{\alpha_{(n-2)}}}$$

ottiensi $\frac{\alpha_{(n-1)}}{\alpha_{(n)}} = \cfrac{1}{a_{(n)} + \cfrac{1}{a_{(n-1)} + \cfrac{1}{a_{(n-2)} \text{ ec.} + \cfrac{1}{a}}}}$

cioè lo sviluppamento inverso di quello ch' esprime x. Dunque se i quozienti consecutivi formano una serie simmetrica

$a, a_{\prime}, a_{\prime\prime}, \ldots a_{\prime\prime}, a_{\prime}, a$, è $\frac{\alpha_{(n-1)}}{\alpha_{(n)}} = \frac{\mathrm{a}_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$ e però $\alpha_{(n-1)} = \mathrm{a}_{(n)}$.

Reciprocamente se $\alpha_{(n-1)} = \mathrm{a}_{(n)}$ la serie de' quozienti $a, a_{\prime}, a_{\prime\prime}$, ec. è simmetrica. Ciò si verifica mediante le formole poste sul principio di questo §. Così la frazione $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_{\prime} + \cfrac{1}{a_{\prime\prime}}}}$ risulta $= \cfrac{1}{a_{\prime\prime} + \cfrac{1}{a_{\prime} + \cfrac{1}{a}}}$ nella sola ipot. di $a_{\prime\prime} = a$

* §. 173. Abbiasi una frazione $\frac{\mathrm{a}_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$ e suppongasi $x - \frac{\mathrm{a}_{(n)}}{\alpha_{(n)}} = \pm \frac{\delta}{[\alpha_{(n)}]^2}$, essendo $\delta < 1$.

Qual'è la condizione da cui dipende che $\frac{\mathrm{a}_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$ sia una frazione convergente, generata dallo sviluppamento d' x in frazione continua?

Chiamando $x_{(n)}$ il quoziente completo che nello sviluppamento d' x succede ad $a_{(n)}$, si ha (53)

$$x=\frac{a_{(n)}x_{(n)}+a_{(n-1)}}{\alpha_{(n)}x_{(n)}+\alpha_{(n-1)}}$$ e però $$x-\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}=\pm\frac{1}{\alpha_{(n)}[\alpha_{(n)}x_{(n)}+\alpha_{(n-1)}]}$$

quantità che dev' essere $=\pm\frac{\delta}{[\alpha_{(n)}]^2}$, il che suppone l'eq. $\pm\delta=\frac{\pm\alpha_{(n)}}{\alpha_{(n)}x_{(n)}+\alpha_{(n-1)}}$, e perchè (§. cit.) $x_{(n)}>+1$, $\delta<\frac{\alpha_{(n)}}{\alpha_{(n)}+\alpha_{(n-1)}}$.

Resta da provarsi che sempre si possa avere la quantità

(17) ... $\alpha_{(n)}a_{(n-1)}-a_{(n)}\alpha_{(n-1)}$ affetta dal segno di δ.

Essendo in nostro arbitrio d'inoltrare la derivazione de' quozienti $a_{\prime}$, $a_{\prime\prime}$, ec. in guisa che l'ultimo $a_{(n)}$ sia >1, possiamo sostituire

$$\frac{1}{a_{(n-1)}+\frac{1}{a_{(n)}-1+\frac{1}{1}}}$$ in vece delle due ultime frazioni. Così le ultime tre frazioni convergenti sono $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$, $\frac{a_{(n)}-a_{(n-1)}}{\alpha_{(n)}-\alpha_{(n-1)}}$, $\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$ ed il numeratore della differenza fra la 2.ª e la 3.ª, cioè $a_{(n)}\alpha_{(n-1)}-\alpha_{(n)}a_{(n-1)}$, ha il segno contrario della formola (17). Dunque per fare in modo che il numeratore della frazione equivalente ad $x-\frac{a_{(n)}}{\alpha_{(n)}}$ abbia il segno di δ basta prendere se occorre $\frac{a_{(n)}-a_{(n-1)}}{\alpha_{(n)}-\alpha_{(n-1)}}$ in vece di $\frac{a_{(n-1)}}{\alpha_{(n-1)}}$.

Diciamo adesso che se abbiasi $\delta < \frac{a_{(n)}}{a_{(n)} + a_{(n-1)}}$ è $x_{(n)} > +1$ ed $\frac{a_{(n)}}{a_{(n)}}$ è una frazione convergente verso x. In fatti si può supporre $\delta = \frac{a_{(n)}}{m[a_{(n)} + a_{(n-1)}]}$ dove $m > 1$: quindi

$$\frac{a_{(n)}}{m[a_{(n)} + a_{(n-1)}]} = \frac{a_{(n)}}{a_{(n)} x_{(n)} + a_{(n-1)}}$$ cioè

$$x_{(n)} = \frac{m a_{(n)} + (m-1) a_{(n-1)}}{a_{(n)}} > 1 .$$

* §. 174. Siccome l'anno *solare* o *tropico* (di 365.$^{g.}$ 5.$^{or.}$ 48.′ 49.″) supera l'anno civile di 5.$^{or.}$ 48.′ 49.″ cioè di 20929″, è necessaria una periodica correzione del 2.°, altrimenti le stagioni più non corrispondono ai fenomeni, e la cronologìa più non è in grado di stabilire alcun' epoca nella storia.

Se 1.$^{an.}$ dà 20929″ di anticipazione, 1$^{an.}$×86400 dee dare un' anticìpazione = 20929″×86400. Ma 1″×86400 equivale ad un giorno. Dunque in 86400 anni l'anno tropico sorpassa l'anno civile di 20929 giorni. Nella riforma del Calendario, effettuata per ordine del Pontef. *Gregorio* XIII. fu fissato d' intercalare 97 giorni in 400 anni, il che equivale ad intercalare periodicamente nello spazio di 4 secoli un giorno in ogni 4.° anno, eccettuato l' ultimo de' primi tre secoli. Questa riforma per altro, siccome sostituisce $\frac{400}{97}$ $\left(= \frac{86400}{20952}\right)$ ad $\frac{86400}{20929}$,

suppone l' anno civile di 20952″ e dà un eccesso di 23″.

L' inesattezza del n.° $\frac{400}{97}$ si scuopre anche mediante il confronto di esso con le frazioni convergenti

$$\frac{4}{1},\ \frac{29}{7},\ \frac{33}{8},\ \frac{128}{31},\ \frac{161}{39},\ \frac{2704}{653},\ \frac{2685}{694},\ \frac{5569}{1349};$$

nate dallo sviluppamento di $\frac{86400}{20929}$. Si vede però che il n.° prescelto nella riforma Gregoriana si rende pregevole in grazia della sua semplicità.

* §. 175. La rivoluzione *sinodica* (intervallo fra due *congiunzioni* della Luna) è di 29$^{g.}$, 530588; il suo duodecuplo 354$^{g.}$, 367056 costituisce l' anno lunare, ed in questo intervallo la luna ritarda di 10$^{g.}$, 875166 in confronto dell' anno tropico = 365$^{g.}$, 242222.

Il ritardo essendo proporzionale al tempo, se ad ogni 365$^{g.}$, 242222 corrisponde il ritardo di 10$^{g.}$, 875166 d' uopo è che ad ogni periodo di 365, 242222 lunazioni corrisponda per rapporto alla luna il ritardo di 10, 875166 lunazioni.

Ciò equivale a dire che si debbono intercalare 10875166 lunazioni in 365242222. Ma $\frac{365242222}{10875166} = 33 + \frac{1}{1 \text{ ec.}}$ dà le frazioni convergenti

$$\frac{33}{1},\ \frac{34}{1},\ \frac{67}{2},\ \frac{168}{5},\ \frac{403}{12},\ \text{ec.}$$

e la 5.ª, siccome $= \frac{168 \times 2 + 67}{5 \times 2 + 2}$, ammette la frazione intermedia antec. $\frac{168+67}{5+2} = \frac{235}{7}$.
Dunque in 235 lunazioni (tempo $= 19^{an.}, 085962$) se ne debbono intercalare 7, e dopo 19 anni le fasi lunari ricompariscono quasi le stesse. La differenza periodica di $0^{g.}, 085962$ porta un errore di $1^{g.}$ in $232^{an.}, 66$.

L'anzidetto periodo di 19 anni ebbe il nome di *numero aureo* perchè fu inciso a lettere d'oro dagli Ateniesi, in contrassegno della loro stima e gratitudine verso *Metone*, che il primo lo immaginò e lo rese noto alla Grecia, dichiarandone l'importanza nella solennità de' Giuochi Olimpici.

I cinque rami d' applicazione promessi nel 1.° tomo col manifesto del Sig. Assunto Barbani e Comp.°, cioè la dottrina del baratto mercantile, la teorìa dell' interesse, quella de' vitalizj e delle successioni, alcune disquisizioni spettanti alla Giurisprudenza, un saggio sul prezzo delle cose mercantili, si trasferiscono al fine del tomo 3.°, e ciò per due ragioni: 1.ª che il presente volume non comporta un aumento di 60 pagine; 2.ª che fa d' uopo aspettare la pubblicazione del tomo XVII. della Soc. Italiana, a cui già da tre anni una notabil parte delle anzidette applicazioni fu destinata.

Fine del Tomo I.

Pagine 350

GIUNTE TRASMESSE DALL' AUTORE.

Nella pag. 20 dopo la lin. 6.ª di fondo aggiungasi:

Ciascun prodotto parziale esprime milionesime, cioè un n.° decimale le cui infime unità occupano il 2.° rango dopo quello dell' infima decimale esatta richiesta nel prodotto totale; quindi la corrispondenza verticale delle cifre a destra nella distribuzione de' prodotti parziali. Una simile osservazione essendo applicabile a qualsivoglia caso particolare costituisce la ragione della regola di compendio.

Pag. 96. lin. 6. Infatti se l' operazione indicata dall' esponente $\frac{m}{m_,}$ è reale, effettuata la potenza N^l ed il prodotto $i.N^l$, onde si abbia $i.N^l = P$, è chiaro che $P^{\frac{m}{m_,}}$, cioè $(iN^l)^{\frac{m}{m_,}}$ è anch'esso un simbolo legittimo.

Ma supposto l un n.° intiero positivo si ha $iN^l = iNN\ldots(l \text{ vol.})$: dunque

$$(iN^l)^{\frac{m}{m_,}} = i^{\frac{m}{m_,}} N^{\frac{m}{m_,}} N^{\frac{m}{m_,}} \ldots (l \text{ vol.}),$$

e questa formola, a tenore della convenzione sopra stabilita, compendiosamente si rappresenta per $i^{\frac{m}{m_,}} N^{\frac{lm}{m_,}}$.

Nella stessa guisa si giustifica la trasformazione di $(N^{\frac{m}{m_,}})^l$ in $N^{\frac{lm}{m_,}}$. La 1.ª dell'eq.ⁱ

$$\left\{(N^l)^{\frac{m}{m_,}} = N^{\frac{lm}{m_,}},\ (N^{\frac{m}{m_,}})^l = (N^l)^{\frac{m}{m_,}}\right\} \cdots (\alpha)$$

dà $(N^{m_,})^{\frac{m}{m_,}} = N^m$: entrambe concorrono a dimostrare che debb' essere $(N^{\frac{m_,}{m}})^{\frac{m}{m_,}} = N$.

Qualunque sia l'operazione indicata dall'esponente $\frac{1}{m}$, dove m è un n.° intiero positivo, è certo, in forza della 1.ª eq. (a) che $(Q^m)^{\frac{1}{m}}$ equivale a $Q^{\frac{m}{m}}=Q$. Ma le operazioni espresse dagli esponenti m, $\frac{1}{m}$, non possono elidersi se non sieno inverse tra loro, ed il rapporto delle anzidette operazioni non dipende dalla grandezza di m: dunque sono inverse anche le operazioni rappresentate dagli esponenti $m_{,}$, $\frac{1}{m}$; m, $\frac{1}{m_{,}}$.

È proprio delle operazioni inverse di dare il medesimo risultamento qualunque sia l'ordine con cui si eseguiscono. Così

$a+b-c=a-c+b$; $(a\times b):c=(\frac{a}{c})\,b$. Dunque

$(N^{\frac{m_{,}}{m}})^{\frac{m}{m_{,}}}=\left\{\left[(N^{m_{,}})^{\frac{1}{m}}\right]^m\right\}^{\frac{1}{m_{,}}}$, e soppresse le operazioni $\frac{1}{m}$, m, che si elidono, resta

$(N^{m_{,}})^{\frac{1}{m_{,}}}=N^{\frac{m_{,}}{m_{,}}}=N$, ciò che voleasi ec.

Pag. 193. lin. 2.ª Per liberare la prec. formola dall' induzione si concepisca verificata la legge di derivazione delle quantità $x_{,}$, $x_{,,}$, ec. sino ad $x_{(n-3)}$: deducasi la susseg. $x_{(n-2)}$ mediante la solita proporzione

$$m:m-1-\frac{m-1}{m}-\left(\frac{m-1}{m}\right)^2-\left(\frac{m-1}{m}\right)^3\ldots\ldots-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}::1:x_{(n-2)}$$

ossia (118) $m : m-1-(m-1)\left\{1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}\right\} :: 1 : x_{(n-2)}$

e siccome questa dà $x_{(n-2)} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}$ si concluderà che se la legge di derivazione delle $x_{,}$, $x_{,,}$, ec. sussiste sino ad $x_{(n')}$ debb' estendersi ad $x_{(n'+1)}$, da questa ad $x_{(n'+2)}$, ec. ec., cioè ec.

Postilla ommessa alla pag. 223. lin. 16.

La coincidenza delle mantisse, calcolata e tabulare, è un sicuro argomento dell' esatta soluzione in n.[i] intieri, quando si cerca una potenza intiera positiva di un dato n.° intiero, il prodotto di più n.[i] consimili o il rapporto di due n.[i] commensurabili, perchè intiero dev' essere il risultamento, e non può egli corrispondere ad una mantissa discrepante dalla tabulare. La coincidenza sopra indicata diviene fallace indizio di esattezza allorchè vuolsi il n.° di un logaritmo assegnato, perchè la mantissa tabulare può concepirsi indefinitamente protratta, mentre la mantissa proposta esclude qualunque siasi prolungamento.

Avvertimento. Per rapporto alla regola di compendio della pag. 20 abbiamo recentemente osservato, che l' ultima delle cifre richieste comporta l' aumento di un' unità se quella che gli succede è > 6. Ciò si verifica per es.° nel prodotto di 0,334646 per 0,444363 nell' ipot.

che si vogliano quattro cifre esatte giacchè il prodotto ottenuto con la regola di compendio è 0,1486|75; il prodotto vero 0,1487|04300498. Nè debbonsi riguardare com' eccezioni que' casi in cui l'ultima cifra risulta esatta quantunque a lei ne succeda una >6, come nel prodotto compendioso di 0,0538534 per se medesimo, che è 0,0029001|78, poichè l'aumento sopra indicato, porge un valore molto più vicino al vero, e lo scopo di qualsivoglia calcolo si è quello di avere col minimo dispendio di fatica e di tempo il massimo rigore possibile nel risultamento finale.

L' indicazione degli errori quì riuniti, per la massima parte piccolissimi, si è creduta opportuna per li principianti.

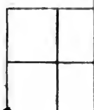
Pag.	lin.	Errori	Correzioni
7	10	1611	1411
43	9 di fon.		si aggiunga nel margine §. 39
68	6	Suppongasi	suppongasi
78	9 di fon.	$x<y$	$x>y$
103	ult.	$(n+1)an+1$	$(n+1)a_{n+1}$
109	4 di fon.	$(\sqrt[n]{m})^n$	$(\sqrt[n]{a^m})^n$
111	13	$a3ab^2$	$3ab^2$
117	ult.	quoziente sia	quoziente di $2m$ per 3 sia
118	4	$4^{12}=$	$4^{12}=$
131	1	$2n=n+n_{,,}$ $2n_,=n+n_{,,,}$	$2n=n_,+n_{,,}$ $2n_,=n_{,,}+n_{,,,}$
	2	le linee 2.ª 3.ª e 4.ª sino a Dunque si riformino come segue:	Ma i sistemi (11), (12) danno $n=n_,=n_{,,}=n_{,,,}$ e ciò distrugge il quadrinomio.
134	12	$\frac{a^6}{b2}$	$\frac{a^6}{b^2}$
152	17	$(=3)40(^2$	$(=3(40)^2$
	19	$(=3)4200(^2 \times 5+3\times 4200\times 5^2 \times 5^3$	si riformi come segue $(3(4200)^2 \times 5+3\times 4200\times 5^2 +5^3$

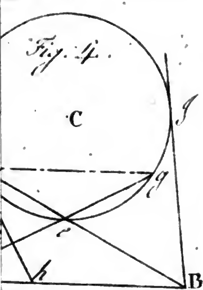
Pag.	lin.	*Errori*	*Correzioni*
157	Nota l. 1	formola(n)	formola (13)
163	7 di fon.	$z^2 > 4o$	$z^2 > 4c$ se $c > o$
165	7	$z^{2n-3}t^3$	$z^{2n-3}t^2$
	8	$\sqrt{t}\frac{2n+1}{1}$	$\sqrt{t}(\frac{2n+1}{1}$
	sud.	$z^{2n-2}t^2$	$z^{2n-2}t$
	3 di fon.	$z^2 > h$	$z^2 > h$ se $h > o$
166	3	(16)	(15)
167	5	Queste equivalgono al respettivo prodotto delle seg.ti	
		$\sqrt[2n+1]{\frac{a+\sqrt{b}}{m}} = z+\sqrt{t}$, $\sqrt[2n+1]{\frac{a-\sqrt{b}}{m}} = z-\sqrt{t}$	
		$\sqrt[2n]{\frac{a+\sqrt{b}}{m}} = \sqrt{z}+\sqrt{t}$, $\sqrt[2n]{\frac{a-\sqrt{b}}{m}} = \sqrt{z}-\sqrt{t}$	
	6	(16)	(15)
	11	$(a^2 - b)^{\frac{-(2n+2)}{2}}$	$(a^2 - b)^{\frac{-(2n+1)+1}{2}}$
171	penul.	$c=)\sqrt{ad}$	$c=\sqrt{ad}$
179	form. 11.a	$\sqrt{4\times 2s}$	$\sqrt{4\times\frac{2s}{d}}$
	form. 12.a	Si ponga d per a ed $\frac{s}{d}$ per s	
184	form. 18.a	$a\frac{rn-1}{r-1}$	$a\frac{r^n-1}{r-1}$
	form. ult.	$\frac{t}{r-1}.\frac{r^{n-1}}{r-1}$	$\frac{t}{r-1}.\frac{r^n-1}{r^{n-1}}$
199	9	$a^{x_{,}+\cdot\cdot\, x_{,,}+x_{,,,}}$	$a^{x_{,}+x_{,,}+x_{,,,}}$
~~204~~	~~4 di fon.~~	~~o o,63803~~	~~o 6,3803~~

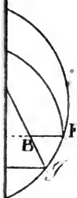
Pag.	lin.	*Errori*	*Correzioni*
210	12	$\frac{\beta^5}{(2\alpha+\beta^5)}$	$\frac{\beta^5}{(2\alpha+\beta)^5}$
219	1	(H)	(G)
239	14	$\frac{\overline{2n+1}\,x^{2n}+\overline{2n-1}}{1+2x^2+x^4}x^{2n+2}$ si riformi come segue $\frac{\overline{2n+1}\,x^{2n}+\overline{2n-1}\,x^{2n+2}}{1+2x^2+x^4}$	
240	12	palla	dalla

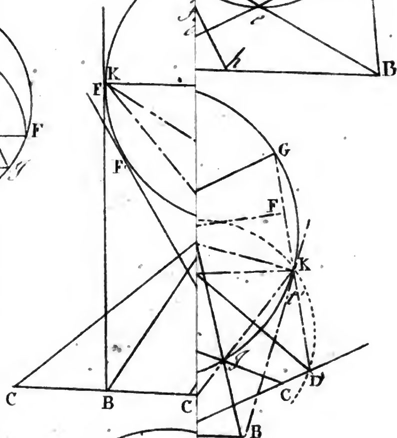
Ad oggetto di rendere l' edizione de' seguenti volumi molto più corretta si è stabilito di sottoporre ogni foglio di stampa ad una triplice revisione.

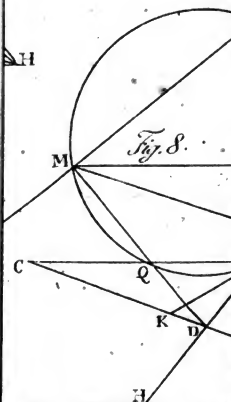


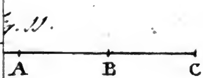














G. Nerici f.


BIBLIOTECA
NAZIONALE
FIRENZE